

Пензенский государственный педагогический университет
им. В. Г. Белинского

Л. С. Горшкова
М. В. Сорокина

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Пенза – 2009

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Пензенского государственного педагогического университета
им. В. Г. Белинского

УДК 513(0.76)

ББК 22.1я73

Горшкова, Л. С. **Основания геометрии**: учебное пособие для
студентов педагогических вузов/ Л. С. Горшкова, М. В. Сорокина.–
Пенза: Пензенский государственный педагогический университет им.
В. Г. Белинского, 2009. – 144 с.

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по
основаниям геометрии. Излагаются такие вопросы, как сущность
аксиоматического метода, требования к системам аксиом, аксиоматики
евклидовой геометрии, геометрия Лобачевского, элементы сферической и
эллиптической геометрий, теория длин отрезков, площадей
многоугольников. К каждой лекции приведён список контрольных
вопросов и упражнений.

Пособие предназначено для студентов и преподавателей
математических специальностей педагогических вузов.

Научный редактор: к.ф.-м.н., профессор В.И. Паньженский

Рецензент: д.т.н., профессор А.М. Данилов

© Пензенский государственный
педагогический университет
им. В. Г. Белинского, 2009

© Л. С. Горшкова, 2009

© М. В. Сорокина, 2009

Содержание

Предисловие.....	5
I. Общие вопросы аксиоматики. Обоснование евклидовой геометрии	
§1. <i>Аксиоматический метод. Математические структуры.</i> <i>Род структур. Классификация математических структур.....</i>	6
§2. <i>Понятие модели математической структуры. Изоморфизм</i> <i>математических структур. Требования к системе аксиом.....</i>	11
§3. <i>Система аксиом Гильберта. Теория длин отрезков в системе</i> <i>аксиом Гильберта.....</i>	18
§4. <i>Система аксиом Вейля и её непротиворечивость.....</i>	33
§5. <i>Система аксиом А.Д. Александрова.....</i>	44
II. Исторический обзор обоснования евклидовой геометрии. Элементы	
геометрии Лобачевского.....	52
§6. <i>Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Проблема</i> <i>У постулата.....</i>	52
§7. <i>Абсолютная геометрия и её основные факты.....</i>	60
§8. <i>Геометрия Лобачевского. Простейшие факты геометрии</i> <i>Лобачевского.....</i>	66
§9. <i>Параллельные по Лобачевскому и их свойства.....</i>	72
§10. <i>Сверхпараллельные прямые и их свойства</i>	79
§11. <i>Пучки прямых и кривые плоскости Лобачевского.....</i>	84
§12. <i>Модель Бельтрами-Клейна плоскости Лобачевского</i>	95
§13. <i>Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского.....</i>	105
III. Неевклидовы геометрии в схеме Вейля.....	112
§14. <i>Элементы сферической геометрии. Эллиптическая</i> <i>геометрия Римана</i>	113
§15. <i>Псевдоевклидово пространство. Реализация геометрии</i> <i>Лобачевского на сфере мнимого радиуса.....</i>	125

IV. Длины. Площади. Объемы.....	132
§16. Длина отрезка. Теорема существования и единственности длины отрезка. Площадь многоугольника. Теорема о площади прямоугольника.....	132
§17. Теорема существования и единственности площади. Равновеликость и равноставленность. Теория объемов (обзор).....	139
Литература.....	143

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие содержит конспекты лекций по разделу курса геометрии «Основания геометрии». Оно написано на основе лекций, прочитанных авторами для студентов физико-математического факультета Пензенского государственного педагогического университета (17 лекций). В пособии можно выделить следующие разделы:

- Общие вопросы аксиоматики (4ч. лекций + 2ч. семинарских занятий);
- Обоснование евклидовой геометрии по Гильберту, Вейлю и Александрову (6ч. лекций + 4ч. семинарских занятий);
- Исторический обзор обоснования евклидовой геометрии. Элементы геометрии Лобачевского (16ч. лекций + 6ч. семинарских занятий);
- Неевклидовы геометрии (4ч. лекций + 3ч. семинарских занятий);
- Длины, площади, объемы (4ч. лекций + 2ч. семинарских занятий).

В пособии приводятся примеры, иллюстрирующие теоретический материал. Для закрепления наиболее важных понятий предлагаются «Вопросы и упражнения».

Авторы выражают благодарность профессору В.И. Паньженскому за ценные советы и замечания по содержанию пособия.

I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИКИ. ОБОСНОВАНИЕ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

§1. Аксиоматический метод. Математические структуры. Род структур. Классификация математических структур

1. Понятие аксиоматического метода и его развитие. Схема построения аксиоматической теории.

Возникновение аксиоматического метода связано с именем Пифагора (V в. до н.э.), но впервые аксиоматический метод успешно применил Евклид в своей книге «Начала» в III в. до н.э. «Начала» построены следующим образом: сначала даются основные понятия и перечисляются основные допущения – постулаты и аксиомы, затем идут предложения (теоремы), которые Евклид стремился доказать по правилам логики на основании принятых постулатов и аксиом.

Аксиоматический метод используется не только как метод построения теории, но и как метод исследования, он применяется не только в математике, но и в других разделах естествознания.

В своем развитии аксиоматический метод прошел три этапа: первый этап связан с Евклидом (III в. до н.э.); второй этап связан с открытием теории множеств Г.Кантором и геометрии Лобачевского (XIX в.); третий этап связан с возникновением символического исчисления (XX в.).

Всякая аксиоматическая теория строится по следующей схеме:

1. Перечисляются основные понятия: основные образы и основные отношения – отправные понятия, принимаемые без определения.

2. Дается список аксиом – исходных предложений теории, принимаемых без доказательства, в которых выражены некоторые свойства основных понятий.

3. Все другие продолжения теории доказываются чисто логическим путем с помощью аксиом и ранее доказанных теорем.

4. Все понятия, не являющиеся основными, определяются через основные и ранее введенные понятия.

2. Понятие математической структуры. Примеры. Род структур.

Теория структур данного рода. Классификация математических структур.

Многие математические структуры построены на теоретико-множественной основе.

Определение. Математическая структура – это аксиоматическая теория, аксиомы которой выражены в терминах теории множеств.

Математическая структура определяется заданием одного или нескольких множеств

$$M_1, M_2, \dots, M_k, \quad (1.1)$$

элементы которых связаны отношениями

$$p_1, p_2, \dots, p_l \quad (1.2)$$

свойства этих отношений выражены в аксиомах

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \quad (1.3)$$

Множества (1.1) называются базисными множествами, отношения (1.2) – основные отношения, аксиомы (1.3) – аксиомы математической структуры. Совокупность всех аксиом $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ называется системой аксиом математической структуры.

Обозначаются математические структуры так:

$$S = (M_1, M_2, \dots, M_k, p_1, p_2, \dots, p_l) + \Sigma \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\} \quad (1.4)$$

Среди базисных множеств (1.1) часть являются основными, а могут быть и вспомогательные множества.

Пример 1. Пусть S – векторное пространство. Базисными множествами являются V – множество векторов и R – множество действительных чисел.

V – основное множество, R – вспомогательное. Вспомогательные множества обычно не включают в скобки при записи математической структуры в виде (1.4).

В роли основных отношений для рассматриваемой математической структуры выступают операции: φ_1 – сложение векторов, φ_2 – умножение вектора на число. Система аксиом Σ векторного пространства состоит из 8 аксиом: первые 4 аксиомы описывают свойства операции φ_1 , а следующие 4 – свойства операции φ_2 . Перечислим эти аксиомы:

Аксиомы сложения векторов

$$\alpha_1: \forall a, b \in V / a + b = b + a ;$$

$$\alpha_2: \forall a, b, c \in V / (a + b) + c = a + (b + c) ;$$

$$\alpha_3: \exists \theta \in V / \forall a \in V \ a + \theta = a, \theta - \text{нулевой вектор};$$

$\alpha_4: \forall a \in V \exists a' \in V / a + a' = \theta, a' - \text{противоположный вектор для } a \text{ и}$
обозначается: $-a$.

Аксиомы умножения вектора на число

$$\alpha_5: \forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in R \ \lambda(\mu a) = \lambda\mu(a) ;$$

$$\alpha_6: \forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in R \ (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu(a) ;$$

$$\alpha_7: \forall a, b \in V, \forall \lambda \in R \ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b ;$$

$$\alpha_8: 1 \cdot a = a, 1 \in R.$$

Следовательно, векторное пространство есть математическая структура S следующего вида:

$$S = (V, \varphi_1, \varphi_2) + \sum \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8\}$$

Определение. Совокупность всех математических структур, определяемых системой аксиом Σ , называется родом структур.

Пусть Σ – система аксиом математической структуры S . Обозначим через $T(\Sigma)$ теорию структур данного рода – это совокупность всех предложений, которые можно доказать на основе системы аксиом Σ .

Другими словами, $T(\Sigma)$ – это аксиоматическая теория, построенная на основе системы аксиом Σ .

Пример 2. Структура рода структур группы. Род структур группы определяется заданием одного базисного множества G и одного основного отношения, в роли которого выступает бинарная операция, обозначаемая точкой $(\cdot)$, система аксиом Σ состоит из четырех аксиом:

$$S = (G, \cdot) + \sum (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).$$

$$\alpha_1: \forall (a, b \in G) \exists c \in G / c = ab ;$$

$$\alpha_2: \forall a, b, c \in G (a \cdot b)c = a(bc) ;$$

$$\alpha_3: \exists e \in G, \forall a \in G \ ae = a ;$$

$$\alpha_4: \forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, aa^{-1} = e.$$

Добавим к аксиомам $\alpha_1 - \alpha_4$ аксиому коммутативности α_5 :

$\alpha_5: \forall a, b \in G \quad ab = ba$, получим математическую структуру S_1 :

$$S_1 = (G, \varphi) + \sum_1 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5).$$

Σ_1 – система аксиом рода структур абелевых групп. $T(\Sigma)$ – теория групп, $T(\Sigma_1)$ – теория абелевых или коммутативных групп. Ясно, что $T(\Sigma) \neq T(\Sigma_1)$.

Определение. Две системы аксиом Σ и Σ' называются *эквивалентными*, если теории, построенные на основе этих систем аксиом, совпадают, т.е. $T(\Sigma) = T(\Sigma')$.

В примере 2 система аксиом групп Σ и система аксиом абелевых групп Σ_1 не эквивалентны, так как $T(\Sigma) \neq T(\Sigma_1)$.

Примером эквивалентных систем аксиом являются система аксиом Атанасяна и система аксиом Погорелова школьного курса геометрии, так как они определяют одну аксиоматическую теорию – евклидову геометрию.

3. Классификация математических структур.

Все математические структуры условно делятся на 3 типа:

- а) алгебраические;
- б) топологические;
- в) структуры порядка.

а) Примерами алгебраических структур являются векторные пространства (пример 1), группы (пример 2), кольца и др.

б) Примерами топологических структур являются евклидовы, аффинные, проективные пространства и др.

в) Структуры порядка определяются заданием одного базисного множества M и одного основного отношения – отношения предшествования, которое обозначается « $\leq$ » и читается меньше или равно. Итак, структура порядка: $S = (M, \leq) + \Sigma_{1-3}$.

Аксиомы рода структур порядка:

- 1) $\forall x \in M, x \leq x$;
- 2) $(x \leq y, y \leq x), \text{ то } x = y \quad \forall (x, y \in M)$;
- 3) $\forall (x, y, z \in M) \quad x \leq y, y \leq z, \text{ то } x \leq z$.

Если на множестве M определено отношение предшествования, удовлетворяющее аксиомам 1-3, то множество M называется *упорядоченным*.

Если отношение « $\leq$ » определено для любых двух элементов множества M , то M называется *вполне упорядоченным* множеством, а если отношение предшествования определено не для любой пары элементов из множества M , то M называется *частично упорядоченным*.

Примером вполне упорядоченного множества является множество действительных чисел R , упорядоченных по величине: $\forall (x, y \in R) \quad x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$.

Примером частично упорядоченного множества является множество всех подмножеств данного множества, упорядоченных по включению (см. И.П.Егоров «Основания геометрии», §2, стр.15,16).

Вопросы и упражнения

1. Какие понятия в аксиоматической теории называются основными?
2. В чем отличие предложений, выражающих аксиомы, от других предложений (теорем) аксиоматической теории?
3. Определить отношение порядка во множестве вещественных чисел.
4. Привести пример частично упорядоченного множества.
5. Привести примеры эквивалентных систем аксиом.
6. Привести схему доказательства эквивалентности систем аксиом Атанасяна и Погорелова школьного курса геометрии.
7. Построить несколько элементов фактор-множества множества прямых евклидовой плоскости по отношению параллельности прямых.
8. Привести пример отношений эквивалентности, используемых в геометрии.
9. Будет ли отношение сонаправленности двух лучей отношением эквивалентности.
10. Привести пример математических структур с одним базисным множеством и двумя основными отношениями.
11. Пусть V – n -мерное векторное пространство над полем K . Определить структуру аффинного пространства на множестве V .
12. Пусть M – множество матриц размера $n \times p$ над полем K . Определить на множестве M структуру аффинного пространства над полем K и указать размерность этого пространства.

§2. Понятие модели математической структуры.

Изоморфизм математических структур.

Требования к системе аксиом

1. Понятие модели (интерпретации системы аксиом).

Пусть дана математическая структура S

$$S=(M_1, M_2, \dots, M_k, p_1, p_2, \dots, p_l)+\sum\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$$

Природа элементов базисных множеств – произвольная, основные отношения не конкретизированы.

Определение. Всякий конкретный набор базисных множеств и основных отношений, удовлетворяющих системе аксиом Σ , называется моделью математической структуры или интерпретацией системы аксиом.

При построении модели математической структуры S мы определяем ее основные множества и основные отношения на базе некоторой аксиоматической теории T так, чтобы аксиомы математической структуры S были истинными предложениями теории T .

Пример 1. S – структура рода структур группы.

$$S=(G, P)+\sum(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \text{ (см. пример 2, §1)}$$

1) Возьмем в роли базисного множества G – множество действительных чисел R , а в роли основного отношения p – сложение действительных чисел: «+». Далее проверяем выполнимость аксиом $\alpha_1 - \alpha_4$ группы. Делаем вывод, что $(R, +)$ – модель группы.

2) В роли базисного множества G возьмем D – множество всех движений плоскости, в роли p – композицию движений. Нетрудно убедиться, что аксиомы $\alpha_1 - \alpha_4$ выполняются и (D, p) – модель группы.

Пример 2. S – структура рода структур n -мерного векторного пространства:

$$S=(V, \varphi_1, \varphi_2)+\sum(\alpha_1 - \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}).$$

V – множество векторов, φ_1 – сложение векторов, φ_2 – умножение векторов на действительное число. Аксиомы $\alpha_1 - \alpha_8$ см. в примере 1, §1.

α_9, α_{10} – аксиомы размерности:

α_9 : Во множестве V существует n линейно независимых векторов.

α_{10} : Любая совокупность из $(n+1)$ вектора – линейно зависима.

1) Возьмем в роли множества V – множество квадратных матриц M второго порядка с вещественными элементами.

φ_1 – сложение матриц, φ_2 – умножение матрицы на число. Нетрудно убедиться, что аксиомы $\alpha_1 - \alpha_8$ выполняются, так как операции φ_1 и φ_2 сводятся к операциям сложения и умножения действительных чисел, а в теории действительных чисел эти свойства выполняются.

Итак, $(M, \varphi_1, \varphi_2)$ – векторное пространство, четырехмерное, т.к. можно указать 4 линейно независимых вектора.

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а любая совокупность из 5 векторов будет линейно зависима.

2) $S = (M, \varphi_1, \varphi_2)$ – модель векторного двумерного пространства, где $M = \{a + bi, a, b \in R\}$, φ_1 – сложение комплексных чисел, φ_2 – умножение комплексного числа на вещественное число.

В качестве базисных можно взять векторы: $e_1 = 1, e_2 = i$.

2. Изоморфизм математических структур.

Пусть даны две математические структуры S и S' одного рода:

$S = (M, p)$ и $S' = (M, p')$.

Определение. Математические структуры S и S' называются изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие f между элементами их базисных множеств такое, что соответствующие элементы находятся в одноименных отношениях.

Это означает, если $f(a) = a', f(b) = b'$ и элементы a и b находятся в отношении p , то a' и b' находятся в отношении p' .

Существуют как изоморфные так и неизоморфные математические структуры.

Пример 3. Рассмотрим две структуры рода структур группы $S = (R^+, \cdot)$ и $S' = (R, +)$

$$f: R^+ \rightarrow R / \forall a \in R^+ f(a) = \ln a \in R$$

$$\text{Если } f(a) = \ln a, f(b) = \ln b, \text{ то } f(a \cdot b) = \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b = f(a) + f(b).$$

Это значит, что группа положительных чисел по умножению изоморфна группе всех действительных чисел по операции сложения.

А, например, группа $(R, +)$ и группа, состоящая из двух элементов $\{1, -1\}$ по операции умножения, неизоморфны.

3. Требования, предъявляемые к системе аксиом.

При построении аксиоматической теории к системе аксиом предъявляются следующие три требования: *непротиворечивость, независимость и полнота.*

Рассмотрим последовательно эти требования.

Непротиворечивость системы аксиом.

Определение. Система аксиом Σ называется *непротиворечивой*, если в теории, определяемой системой аксиом Σ не содержится противоречия, т.е. не содержится предложение A и его отрицание $\bar{A}$.

В 20 годы XX века немецкий математик Гёдель доказал, что нельзя доказать непротиворечивость аксиоматической теории средствами самой теории, а можно доказать только относительную непротиворечивость.

Вопрос о непротиворечивости системы аксиом решается с помощью построения модели системы аксиом Σ на базе аксиоматической теории T' , про которую известно, что она непротиворечива.

Тогда каждое утверждение теории T , определяемой системой аксиом Σ , будет некоторым истинным предложением в теории T' , но поскольку мы предположили, что T' – непротиворечива, то в теории T' не должно быть двух предложений отрицающих друг друга, но тогда их нет и в теории T . Таким образом, для доказательства непротиворечивости системы аксиом нужно построить ее модель.

Замечание. В примерах 1 и 2 настоящего параграфа были построены модели системы аксиом группы и системы аксиом векторного пространства. Значит, указанные системы аксиом – непротиворечивы.

Независимость системы аксиом.

Определение. Система аксиом называется *независимой*, если ни одна из аксиом этой системы не зависит от остальных аксиом, т.е. не может быть доказана как теорема с помощью других аксиом данной системы аксиом.

Пусть дана непротиворечивая система аксиом $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha\}$, и пусть аксиома α зависит от остальных аксиом системы.

Рассмотрим систему аксиом $\Sigma' = \Sigma \setminus \{\alpha\}$ и теории $T(\Sigma)$ и $T(\Sigma')$, определяемые системами аксиом Σ и Σ' соответственно. Эти теории совпадают. Действительно, Σ и Σ' отличаются только аксиомой α , но утверждение α входит в $T(\Sigma)$ как аксиома, а в теорию $T(\Sigma')$ как теорема (по предположению α зависит от остальных аксиом Σ).

Итак, $T(\Sigma) = T(\Sigma')$

Рассмотрим теперь систему аксиом $\Sigma^* = \Sigma \setminus \{\alpha\} \cup \{\bar{\alpha}\}$ или $\Sigma^* = \Sigma' \cup \{\bar{\alpha}\}$. Теория $T(\Sigma^*)$ – противоречива, так как утверждение $\alpha \in T(\Sigma^*)$ как теорема, а утверждение $\bar{\alpha}$ (отрицание α) входит в $T(\Sigma^*)$ как аксиома, тогда система аксиом Σ^* – противоречивая система аксиом, и у нее нет модели.

Следовательно, чтобы доказать, что аксиома α системы аксиом Σ не зависит от остальных аксиом этой системы, достаточно построить модель, в которой выполняются все аксиомы системы Σ кроме аксиомы α , а вместо α выполняется ее отрицание $\bar{\alpha}$.

Пример 4. Рассмотрим систему аксиом Σ абелевой группы:

$$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$$

$$\alpha_5: \forall a, b \in G, ab = ba.$$

Нетрудно убедиться, что аксиома коммутативности α_5 не зависит от остальных аксиом системы аксиом Σ .

Действительно, система аксиом $\Sigma^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \bar{\alpha}_5\}$ – непротиворечива.

$$\bar{\alpha}_5: \exists a, b \in G, ab \neq ba.$$

$S^* = (G, \cdot) + \Sigma^*$ определяет структуру некоммутативной (неабелевой) группы.

В качестве модели системы аксиом Σ^* можно взять, например, множество невырожденных квадратных матриц второго порядка, по операции умножения матриц это множество является группой, причем некоммутативной.

Полнота системы аксиом.

Пусть нам дана непротиворечивая система аксиом $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, описывающая свойства отношений $p_1, p_2, \dots, p_l$. Допустим, что существует аксиома α , которая удовлетворяет условию:

- а) аксиома α не вводит новых отношений;
- б) она независима от аксиом системы Σ ;
- в) система аксиом $\Sigma + \alpha$ – непротиворечива.

В этом случае система аксиом Σ называется *неполной*. Если же такой аксиомы α не существует, то система аксиом Σ называется *полной*.

Пусть система аксиом Σ – неполная и существует аксиома α , удовлетворяющая указанным выше условиям а), б), в).

По условию система аксиом $\Sigma' = \Sigma + \alpha$ – непротиворечива, а так как α не зависит от остальных аксиом Σ' , то непротиворечива и система аксиом $\Sigma'' = \Sigma + \bar{\alpha}$.

Пусть M' – интерпретация Σ' , M'' – интерпретация Σ'' , так как $\Sigma \subset \Sigma'$ и $\Sigma \subset \Sigma''$, то M' и M'' являются также интерпретациями системы аксиом Σ . Но в интерпретации M' выполняется α , а в интерпретации M'' выполняется $\bar{\alpha}$, следовательно, интерпретации M' и M'' системы аксиом Σ *неизоморфны*.

Таким образом, если система аксиом Σ – неполная, то для нее существует неизоморфные интерпретации. Следовательно, чтобы доказать *полноту* данной системы аксиом, достаточно доказать, что *все ее интерпретации изоморфны*.

Пример 5. Система аксиом Вейля n -мерного аффинного пространства над полем R – полная, так как любые два n -мерных аффинных пространства – изоморфны.

Пример 6. Система аксиом $\Sigma = \{\alpha_1 - \alpha_4\}$, определяющая структуру группы – неполная, так как позволяет добавить аксиому α_5 (аксиому коммутативности), удовлетворяющую всем условиям а), б), в).

- а) α_5 не вводит новых отношений;
- б) α_5 не зависит от $\alpha_1 - \alpha_4$ (см. пример 4);

в) система аксиом $\alpha_1 - \alpha_5$ - непротиворечива, так как определяет структуру абелевой группы.

Если система аксиом Σ , определяющая структуру рода T – полная, то теория $\Gamma(T)$ – называется *однозначной* (геометрия пространств A_n , E_n – однозначные теории). Если Σ – неполная система аксиом, то теория, ею определяемая, – *многозначная*, например, теория групп.

Вопросы и упражнения

1. Привести пример модели аксиом порядка 1-2, в которой бы не выполнялась аксиома 3 (аксиома транзитивности).
2. Определить отношение порядка во множестве чисел 1, 2, 3, ... упорядоченных по величине.
3. Привести примеры неизоморфных моделей аксиом порядка 1-3.
4. Доказать, что аффинные пространства A_n и A_m неизоморфны при $m \neq n$.
5. Доказать, что группа поворотов плоскости вокруг данной точки на углы 0° , 90° , 180° , 270° и группа классов вычетов целых чисел по модулю 4 – изоморфные модели системы аксиом структуры группы.
6. Показать независимость аксиомы α_5 структуры группы от остальных.
7. Показать полноту системы аксиом векторного пространства.
8. Показать, что система аксиом группы – неполная.
9. Пусть имеются два множества M_1 и M_2 без общих элементов. Назовем элементы множества M_1 точками, элементы множества M_2 – прямыми. Предположим также, что нам дано бинарное отношение между элементами этих двух множеств, называемое отношением инцидентности точек и прямых. Будем говорить, что множество точек и множество прямых допускают структуру рода инцидентности, если выполняются следующие аксиомы инцидентности:
 - 1) Каковы бы ни были две различные точки, существует прямая, инцидентная каждой из этих точек.
 - 2) Каковы бы ни были две различные точки существует не более одной прямой, инцидентной каждой из этих точек.

- 3) Для каждой прямой существует по крайней мере две точки, ей инцидентные.
 - 4) Существует тройка точек, не инцидентных одной прямой.
Проиллюстрировать требования непротиворечивости, независимости и полноты системы аксиом на примере аксиом инцидентности.
10. Привести примеры, когда часть аксиом некоторой полной системы аксиом будет оставаться полной.
11. Может ли полная система аксиом при присоединении других аксиом оказаться неполной?

§3. Система аксиом Гильберта.

Теория длин отрезков в системе аксиом Гильберта

Аксиоматическое обоснование геометрии впервые было дано Гильбертом в 1899 г., уже после того как была открыта неевклидова геометрия. Вскоре за тем появились системы аксиом Пеано, Кагана, Шура и др. Точечно векторная аксиоматика евклидовой геометрии была предложена Вейлем в 1918 г.

В аксиоматике Гильберта содержится 20 аксиом и описывают они восемь основных понятий. Основные понятия: точки, прямые, плоскости – называются основными образами. Основные понятия p_1 – инцидентности точки и прямой, p_2 – инцидентности точки и плоскости, p_3 – лежать между или короче «между» для трех точек, инцидентных прямой, p_4 – конгруэнтности отрезка отрезку и p_5 – конгруэнтности угла углу – называются основными отношениями. Система аксиом Гильберта евклидовой геометрии состоит из пяти групп, описывающих отношения между основными образами.

Первая группа аксиом называется *аксиомами соединения (инцидентности)*. Она описывает отношения инцидентности точки и прямой, точки и плоскости.

Вторая группа аксиом называется *аксиомами порядка*. Она описывает основное отношение «лежать между», связанное с тремя точками, инцидентными прямой.

Третья группа аксиом называется *аксиомами конгруэнтности*; она описывает отношения конгруэнтности соответственно отрезка отрезку и угла углу.

Четвертая группа аксиом называется *аксиомами непрерывности* и описывает свойства непрерывности расположения точек на прямой.

Пятая группа называется также *аксиомой параллельности*.

Первая группа содержит 8 аксиом, вторая – 4, третья – 5, четвертая – 2 и пятая – одну аксиому. Отметим также, что в первой группе аксиом имеются две аксиомы $[I(3), I(4)]$, с двумя; требованиями, во второй группе имеется одна такая аксиома. В третьей группе первая аксиома содержит

два требования, четвертая – три требования. Во всей системе аксиом, состоящей из 20 аксиом, содержится 26 требований.

В геометрии Евклида рассматриваются три множества M_1 , M_2 , M_3 , элементы которых являются соответственно точками, прямыми и плоскостями. Между элементами этих множеств определены основные отношения p_1 – p_5 так, что эти образы и отношения удовлетворяют всем аксиомам гильбертовой аксиоматики. Совокупность элементов указанных трех множеств M_1 – M_3 с отношениями p_1 – p_5 между ними и называется *евклидовым пространством*.

Если в первой группе аксиом сохранить лишь первые три аксиомы, то они вместе с аксиомами других групп аксиом составят систему аксиом евклидовой плоскости. Евклидова плоскость определяется как совокупность точек и прямых. Эти точки и прямые с основными отношениями p_1 , p_3 – p_5 удовлетворяют требованиям всех 15 аксиом гильбертовой аксиоматики планиметрии.

Отметим также, что те понятия, теоремы, следствия, которые могут быть получены на основе первых четырех групп аксиом системы аксиом Гильберта составляют содержание *абсолютной геометрии*. В настоящем параграфе мы знакомимся с системой аксиом Гильберта и приводим понятия, теоремы, следствия, относящиеся к *абсолютной геометрии*.

I. Аксиомы соединения

Эта группа аксиом характеризует *бинарные* отношения p_1 , p_2 инцидентности (синонимы – принадлежности, лежать на, проходить через) соответственно точек и прямых, а также точек и плоскостей.

1. Любым двум различным точкам можно отнести прямую, им инцидентную (рис. 1)



Рис.1

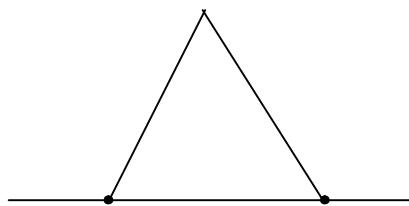


Рис. 2

2. Двум различным точкам можно отнести не более одной прямой a ,

им инцидентной.

3. На каждой прямой существует по крайней мере пара точек, ей инцидентных. Существует тройка точек, не инцидентных одной прямой (рис.2).

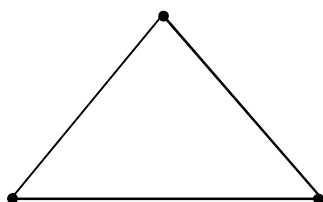


Рис.3

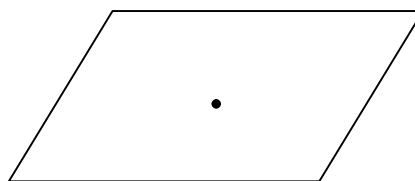


Рис.4

4. Любым трем точкам, не инцидентным прямой, можно отнести плоскость, им инцидентную (рис. 3). На каждой плоскости есть по крайней мере одна точка, ей инцидентная (рис.4).

5. Трем различным точкам, не инцидентным одной прямой, можно отнести не более одной плоскости, им инцидентной.

6. Если две точки прямой инцидентны плоскости, то и каждая точка прямой инцидентна этой плоскости (рис. 5).

Прямая называется *инцидентной плоскости*, если всякая точка, инцидентная в смысле p_1 данной прямой, инцидентна в смысле p_2 данной плоскости.

7. Если две плоскости имеют общую точку, им инцидентную, то они имеют по крайней мере еще одну точку, также им инцидентную (рис. 6).

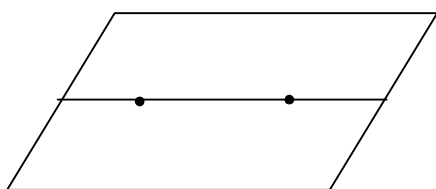


Рис.5

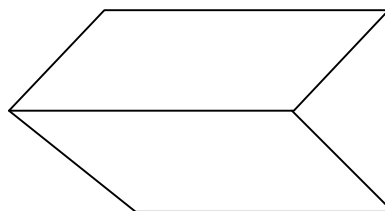


Рис.6

8. Существует четверка точек, не инцидентных одной плоскости (рис.7).

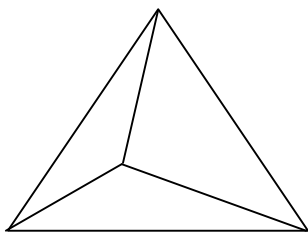


Рис.7

Геометрия первой группы аксиом

Из этих аксиом можно вывести ряд предложений, составляющих геометрию первой группы аксиом. Приведем некоторые из них.

а) *Две различные точки определяют одну и только одну прямую, им инцидентную в «смысле» правила p_1 .*

б) *Три точки, не инцидентные в «смысле» правила p_1 одной прямой, определяют одну и только одну плоскость, им инцидентную по правилу p_2 .*

в) *Прямая a и не инцидентная ей точка A определяют одну и только одну плоскость, им инцидентную.*

г) *Для каждой плоскости можно найти по крайней мере три точки, не инцидентные прямой.*

II. Аксиомы порядка

Основное назначение аксиом этой группы состоит в том, чтобы ввести *тернарное* отношение p_3 «лежать между», относящееся к любым трем различным точкам, инцидентным прямой. Отношение p_3 представляется подмножеством множества $M \times M \times M$, где M обозначает множество точек, инцидентных данной прямой: $p_3 \subset M \times M \times M$. В эту группу входит четыре аксиомы.

1. Если A, B, C – три точки, инцидентные прямой, и точка B лежит в смысле p_3 между точками A, C , то: а) точки A, B, C – различны; б) точка B лежит между точками C, A .

2. Для любых двух точек A, B , инцидентных прямой a , существует точка C прямой a такая, что точка B лежит между точками A и C в смысле p_3 (аксиома неограниченного продолжения прямой).

3. Для трех различных точек, инцидентных прямой, существует не более одной из них, которая лежит в смысле p_3 между двумя оставшимися.

Приведенные аксиомы называются *линейными аксиомами порядка*. Совокупность двух точек A и B и всех точек, которые обладают свойством p_3 быть между точками A и B , называется *отрезком*. Точки, лежащие между A и B , называются *точками отрезка*.

Совокупность трех точек A, B, C , не инцидентных прямой, и трех отрезков, образованных парами этих точек, называется *треугольником*; точки A, B, C называются *вершинами*, а отрезки AB, AC, BC – *сторонами треугольника*. Прямая a называется *пересекающейся с отрезком AC* , если существует точка O отрезка AC , инцидентная прямой a . Отношение «лежать между» мы будем в дальнейшем обозначать звездочкой, поставленной над буквой, обозначающей точку, которая лежит между двумя другими.

4. *Аксиома Паша*. Пусть задан треугольник ABC и в его плоскости прямая a , не проходящая через точки A, B, C . Если прямая a пересекает одну сторону AC треугольника, то она пересекает также или вторую AB или третью его сторону BC (рис. 8).

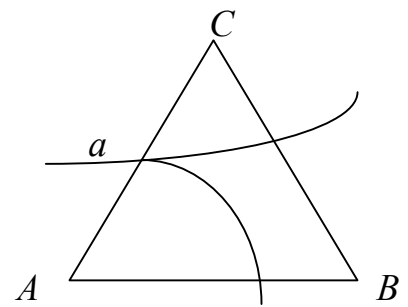


Рис.8

В геометрии первых двух групп аксиом справедливы, в частности, следующие предложения.

- а) *Каждый отрезок имеет по крайней мере одну точку.*
- б) *За каждой точкой на прямой нет непосредственно следующей.*
- в) *Из трех различных точек, инцидентных, прямой одна и только одна обладает свойством лежать между оставшимися двумя другими.*

В этой геометрии можно ввести также понятие луча и угла, прежде всего отметим следующее предложение о делении точек прямой некоторой ее точкой на два множества или два класса.

Все точки прямой a , за исключением точки O , можно разбить на два множества так, что:

- 1) если M, N точки разных множеств, то отрезок MN содержит точку O (рис. 9);
- 2) если M, N точки одного множества, то отрезок MN не содержит точку O (рис. 10).



Рис. 9

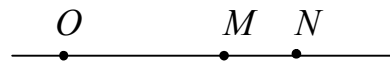


Рис. 10

Множества точек, которые мы получили при разбиении точек прямой a точкой O , называются *лучами*. Следовательно, точки прямой a всякой ее точкой O разбиваются на два луча. Точка O называется *началом этих лучей*. Отметим, что лучи, как и отрезки, являются точечными множествами. Напомним также, что прямая в гильбертовой аксиоматике является элементарным образом и не распадается на точки. В этом смысле совокупность обоих лучей и их начала – точки O – не совпадает с прямой.

В геометрии первых двух групп аксиом можно ввести ряд новых понятий. Пусть три точки A, B, C инцидентны одной прямой. Точки A и B называются *расположенными с одной стороны по отношению к точке C* , если они принадлежат к одному из лучей, порожденных точкой C . Точки A и B называются *расположенными по разные стороны по отношению к точке C* , если они принадлежат разным лучам, порожденным точкой C . Эти понятия можно обобщить на плоскость следующим образом.

Все точки плоскости α за исключением точек некоторой ее прямой a , можно разбить на два множества так, что: 1) если точки M, N точки разных множеств, то прямая a пересекает отрезок MN ; 2) если точки M, N одного множества, то прямая a не пересекает отрезка MN .

В случае пространства справедлива следующая теорема о расположении точек.

Все точки пространства, за исключением точек данной плоскости α , можно разбить на два множества (полупространства) так, что

- 1) если точки M, N точки разных множеств, то плоскость α пересекает отрезок MN ;
- 2) если точки M, N – одного множества, то плоскость α не пересекает отрезка MN .

Множество точек, которые мы получили при разбиении точек плоскости прямой a , называются *полуплоскостями*. Следовательно, точки плоскости разбиваются всякой ее прямой на две полуплоскости. Прямая a ,

производящая деление, называется ребром этих полуплоскостей.

Отметим также, что полуплоскости, как лучи и отрезки, являются точечными множествами. Плоскость в гильбертовой аксиоматике является элементарным образом и не распадается на точки. Совокупность полуплоскостей и точек прямой a совпадает с исходной плоскостью.

Эта теорема позволяет ввести следующие понятия. Пусть точки A, B и прямая a инцидентны одной плоскости α . Две точки A и B называются *расположенными с одной стороны по отношению к прямой a* , если они принадлежат одной из полуплоскостей, порожденных прямой a . Эти точки называются *расположенными по разные стороны по отношению к прямой a* , если они принадлежат разным полуплоскостям.

Нетрудно доказать, что множество точек, инцидентных прямой, можно упорядочить в геометрии первых двух групп аксиом. Множество называется *линейно упорядоченным*, если между его элементами $A, B, C, \dots$ существует отношение «предшествовать» (обозначается символом $<$), удовлетворяющее следующим двум свойствам: 1) если A и B различные элементы множества, то или $A < B$ или $B < A$; 2) если $A < B$, $B < C$, то $A < C$. Второе свойство предшествования называется свойством транзитивности, если A предшествует B и B предшествует C , то A предшествует C . Мы введем предшествование сначала для точек луча, затем обобщим построения на точки всей прямой.

Пусть дана прямая a и ей инцидентная точка O . Эта точка позволяет разбить все остальные точки прямой на два луча a_1 и a_2 . Введем правило предшествования для точек луча a_1 следующим образом.

Если точки A и B принадлежат рассматриваемому лучу, то будем называть ту точку из них предшествующей, которая обладает свойством быть между оставшейся точкой и началом луча O . Нетрудно установить, что так введенное предшествование f для точек луча удовлетворяет указанным двум требованиям. Действительно, построенное правило из двух различных точек луча одну и только одну точку выделяет в качестве предшествующей. Этот факт следует из теоремы, уточняющей аксиому II (3) и теоремы о делении точек прямой некоторой ее точкой на два множества. Нетрудно убедиться, что f – транзитивно. То есть для трех

точек A, B, C имеют место два предшествования: A предшествует B и B предшествует C , то точка A предшествует C . (см. книгу И.П. Егорова «Введение в неевклидовы геометрии»). Можно убедиться также что наряду с введенным понятием предшествования, можно построить противоположное предшествование $\bar{f}$; если A и B по-прежнему принадлежат лучу a_1 , то будем называть ту точку из них предшествующей, которая не обладает свойством лежать между оставшейся точкой и началом луча O . Противоположное предшествование $\bar{f}$ также применимо к любым двум различным точкам луча и транзитивно. Введем теперь правило предшествования для точек, инцидентных прямой a . Возьмем на ней любые две точки A, B . Если эти точки принадлежат одному лучу a_1 , то 1) определяется предшествующая по правилу f . Мы считаем также, что: 2) начало луча O предшествует точкам луча a_1 ; 3) точки второго луча предшествуют началу; 4) точки луча a_2 предшествуют точкам луча a_1 . Наконец, 5) если точки A, B принадлежат второму лучу a_2 , то предшествующая определяется по правилу $\bar{f}$.

Нетрудно доказать, что так построенное правило предшествования f точек прямой транзитивно и применимо к любой паре различных точек прямой. Это предшествование не зависит от выбора точки O . Прямая, точки которой упорядочены по правилу предшествования, называется направленной прямой или осью.

В геометрии первых двух групп аксиом вводится *понятие угла*. Пусть заданы две различные прямые a и b с общей точкой O . Эта точка разбивает точки указанных прямых на пары лучей a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно. *Углом a_1b_1* называется совокупность двух лучей с общим началом O . Точка O называется *вершиной угла*. Лучи a_1, b_1 называются *сторонами угла*.

Внутренними точками угла a_1b_1 называется множество точек плоскости (a, b) , принадлежащее одновременно полуплоскостям (a_1, b) и (a, b_1) . Точки плоскости (a, b) , не принадлежащие сторонам угла и отличные от начала O и внутренних точек, называются *внешними точками угла*.

III. Аксиомы конгруэнтности

Основное назначение аксиом этой группы состоит в том, чтобы описать *бинарные* отношения конгруэнтности p_4 отрезка отрезку и конгруэнтности p_5 угла углу.

1. Пусть дан отрезок AB , а также прямая a' и точка на ней A' . На прямой a' существует B' с той или с другой стороны, относительно A' такая, что отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$ или $AB \equiv A'B'$; требуется также, чтобы $AB \equiv BA$.

2. Если $AB \equiv A''B''$, $A'B' \equiv A''B''$, то $AB \equiv A'B'$

3. Пусть AB и BC два отрезка без общих точек на прямой a и если $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, причем $B' \overset{*}{A'C'}$, то $AC \equiv A'C'$.

4. Пусть $\angle(a_1b_1)$ угол с вершиной O . При любой точке O' выходящем из нее луче a'_1 , по любую сторону прямой a' можно построить в заданной полуплоскости, инцидентной a' , один и только один второй луч b'_1 такой, что $\angle(a_1b_1) \equiv \angle(a'_1b'_1)$. Требуется также, чтобы $\angle(a_1b_1) \equiv \angle(a_1b_1)$,

$$\angle(a_1b_1) \equiv \angle(b_1a_1).$$

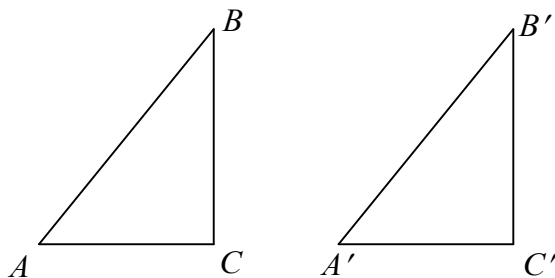


Рис.11

5. Пусть заданы два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ таких, что $AB \equiv A'B'$, что $BC \equiv B'C'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, тогда $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ (рис. 11).

Геометрия первых трех групп аксиом

В геометрии аксиом I – III доказывается рефлексивность, взаимность и транзитивность понятия конгруэнтности отрезков. Аналогичные теоремы о взаимности и транзитивности имеют место для основного отношения p_5 конгруэнтности угла углу. Однако доказательство этих свойств возможно лишь после установления признаков конгруэнтности треугольников. Напомним, что свойство рефлексивности отношения p_5 фиксируется аксиомой III (4).

Введем теперь ряд определений. Говорят, что *отрезок AB больше*

отрезка CD , и употребляя специальное обозначение, записывают $AB > CD$, если существует такая точка M отрезка AB , что $AM \equiv CD$ (рис.12).



Рис. 12

Если $AB > CD$, то говорят также, что отрезок CD меньше отрезка AB и записывают $CD < AB$. Пусть на прямой a дан отрезок AB . Точка O этой прямой называется серединой отрезка,

если $AO \equiv OB$.

Можно доказать, что всякий отрезок имеет середину и притом только одну и эта середина является точкой отрезка AB . Отметим, что понятия больше и меньше для отрезков и середины данного отрезка введены лишь в геометрии первых трех групп аксиом. В этой геометрии мы не располагаем теорией длин отрезков и величин углов. Однако, в ней имеется теория сравнения отрезков и углов, треугольников и других фигур.

Два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, две другие инцидентны прямой. Угол конгруэнтный своему смежному, называется *прямым*. Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного из них являются продолжением сторон другого. Нетрудно доказать, что вертикальные углы конгруэнтны между собой.

Угол, образованный одной стороной треугольника и продолжением другой стороны, называется *внешним углом треугольника*. Справедлива *теорема*: внешний угол треугольника больше каждого внутреннего, не смежного с ним. Две прямые называются *перпендикулярными*, если они образуют при пересечении прямые углы. Из данной точки на данную прямую можно опустить перпендикуляр и притом единственный.

В рассматриваемой геометрии аксиом I—III имеют место все три признака конгруэнтности треугольников. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Каждый угол можно разделить пополам. В этой геометрии справедливы теоремы о том, что большая сторона треугольника лежит против большего угла и каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других его сторон.

Остановимся подробнее на отображениях точечных множеств. Закон, по которому всякому элементу одного множества сопоставляется элемент другого или того же самого множества, называется *отображением*. Отображение $y=f(x)$ называется *взаимно однозначным*, если оно любым двум различным элементам x_1, x_2 первого множества относит различные элементы y_1, y_2 из второго множества и преобразованные элементы y заполняют все второе множество.

Для всякого взаимно однозначного отображения f можно построить обратное отображение. *Обратное отображение* φ по определению относит всякому элементу y второго множества тот элемент x из первого множества, который при отображении f переходит в y : $y = f(x)$.

Взаимно однозначное отображение множества на себя называется *преобразованием этого множества*. Последовательное осуществление двух преобразований f_1, f_2 в указанном порядке приводит к новому преобразованию, которое называется *произведением данных преобразований*. Совокупность преобразований называется *группой преобразований*, если она замкнута относительно операции умножения любых двух преобразований и операции построения обратного преобразования. Возьмем теперь в качестве множества элементов совокупность всех точек пространства геометрии первых трех групп аксиом.

Преобразование точек такого пространства называется *движением*, если оно любую пару точек A и B переводит в точки A' и B' так, что $AB \equiv A'B'$. Движение пространства называется *вращением*, если оно оставляет неподвижной некоторую точку (центр вращения) пространства. Движение называется *вращением вокруг прямой*, если оно оставляет эту прямую точечно неподвижной. Нетрудно доказать, что произведение двух движений, как и обратное преобразование к заданному движению, являются также движениями. Отсюда следует, что совокупность всех движений пространства первых трех групп аксиом составляет группу. Нетрудно доказать, что:

1) точки, лежащие на прямой, переходят при движении в точки, также лежащие на прямой;

2) точки, лежащие на плоскости, при движении переходят в точки, лежащие на некоторой плоскости. Каждое движение сохраняет основное отношение лежать между.

Движения мы определили в геометрии первых трех групп аксиом на основе аксиом конгруэнтности. Можно было бы понятие движения принять в качестве основного понятия и описать свойства движений следующими аксиомами 1-6.

III. Аксиомы движений

1. Движения сохраняют основные образы и отношения между ними.
2. Совокупность движений составляет группу преобразований.
3. Если при движении начало и луч остаются на месте, то каждая точка луча остается на месте.
4. Существует единственное движение, которое начало O , и луч a_1 и полуплоскость с ребром a переводит соответственно в заданные начало $\tilde{O}$, луч $\tilde{a}_1$ и полуплоскость с ребром $\tilde{a}$.
5. Существует движение, переводящее концы отрезка друг в друга.
6. Существует движение, переводящее стороны угла друг в друга.

В геометрии первых двух групп аксиом и аксиом 1-6 движений все аксиомы конгруэнтности, в свою очередь, могут быть доказаны, как теоремы. Таким образом, аксиомы конгруэнтности эквивалентны аксиомам 1-6 движений относительно аксиом первых двух групп I – II. Две группы предложений А и В называются эквивалентными относительно системы аксиом С, если из аксиом С, А следует предложение В, и из аксиом С, В следует А.

IV. Аксиомы непрерывности

Основное назначение этой группы аксиом состоит в том, чтобы «ввести» длины отрезков и величины углов, а также описать свойство непрерывности расположения точек на прямой.

Аксиома Архимеда. Пусть даны два произвольных отрезка AB и CD ;

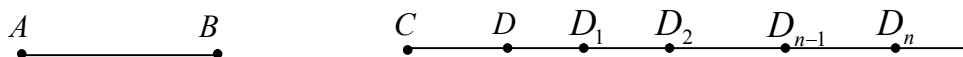


Рис.13

существует такое натуральное n , что

$$nCD > AB.$$

Отрезок nCD по определению означает отрезок CD_n , где D_n точка луча CD полученная при последовательном откладывании отрезков: $CD \equiv DD_1 \equiv D_1D_2 \equiv \dots D_{n-1}D_n$ (рис. 13)

Аксиома Архимеда позволяет в геометрии первых трех групп аксиом построить теорию длин отрезков.

1. *Аксиома Кантора.* Пусть на прямой дана последовательность отрезков, удовлетворяющих двум требованиям: 1) каждый следующий отрезок вложен в предыдущий; 2) не существует отрезка, принадлежащего всем отрезкам последовательности. Тогда существует точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.

Эта аксиома позволяет строить отрезок заданной длины. Нетрудно доказать, что точка в аксиоме Кантора, принадлежащая всем отрезкам последовательности, единственная.

V. Аксиома параллельности Евклида.

Через любую точку A , не инцидентную прямой a , можно провести в плоскости (A, a) не более одной прямой, не пересекающейся с прямой a .

Теория длин отрезков в системе аксиом Гильберта

Аксиомы Архимеда и Кантора позволяют описать процесс измерения одного отрезка другим и каждому отрезку поставить в соответствие его длину.

Возьмем два отрезка $[AB]$ и $[CD]$, пусть $[AB] > [CD]$. Примем отрезок $[CD]$ за единичный, обозначим: $[CD] = e$.

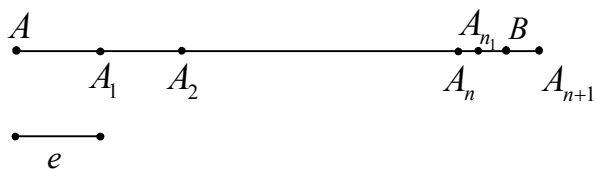


Рис. 14

Измерим отрезок AB с помощью отрезка e . От точки A отложим последовательно отрезки, конгруэнтные отрезку e :

$$[AA_1] = e, [A_1A_2] = e, \dots, [A_{n-1}A_n] = e$$

Если точка A_n совпадает с точкой B , то длина отрезка AB будет равна n : $|AB| = n$.

Если A_n не совпадает с B , а A_{n+1} лежит за точкой B , что возможно по аксиоме Архимеда, то измерим отрезок $[A_n B]$. Для этого отрезок e делим на 10 равных частей и отрезок $[A_n B]$ измерим отрезком $e_1 = \frac{1}{10}e$.

Откладываем от точки A_n отрезки $[A_n A_{n,1}] \equiv e_1$, $[A_{n,1} A_{n,2}] \equiv e_1$ и т.д. n_1 раз. Если точка A_{n,n_1} совпадает с точкой B , то длина отрезка AB будет равна n, n_1 : $|AB| = n, n_1$.

Если $A_{n,n_1} \neq B$, то процесс продолжается, возьмем $e_2 = \frac{1}{10}e_1 = \frac{1}{100}e$ и измерим отрезок $[A_{n,n_1} B]$ отрезком e_2 . Если на некотором шаге n_2 точка A_{n,n_1,n_2} совпадет с B , то $|AB| = n, n_1 n_2$, если не совпадает, то процесс измерения продолжается. На практике, как правило, этот процесс на некотором шаге обрывается, и тогда длина отрезка выражается десятичной дробью.

Если этот процесс бесконечен, тогда мы говорим, что отрезки $[AB]$ и e несоизмеримы. В этом случае мы получим бесконечную последовательность десятичных дробей. Тогда под *длиной отрезка* мы будем понимать предел полученной последовательности десятичных дробей. По аксиоме Кантора этот предел существует и единственный. В этом случае длина отрезка будет выражаться иррациональным числом.

Вопросы и упражнения

- 1) Сформулировать основные понятия системы аксиом Гильберта.
- 2) Перечислить группы аксиом системы аксиом Гильберта, свойства какого основного отношения описывают аксиомы каждой группы соответственно.
- 3) В геометрии каких групп аксиом вводятся понятия «отрезка», «треугольника», «направленной прямой»?
- 4) В геометрии каких групп аксиом вводятся понятия «больше», «меньше» для отрезков и углов, прямого угла, вертикальных углов, доказывается теорема и величине внешнего угла треугольника, понятие движения.

- 5) Можно ли понятие «движения» принять за основное понятие системы аксиом Гильберта? Если «да», то вместо какого понятия.
- 6) В геометрии каких групп аксиом вводится понятие длины отрезка, понятие числовой оси?
- 7) Приведите определения в терминах основных объектов и основных отношений системы аксиом Гильберта понятий полуплоскости, смежных и вертикальных углов, окружности.
- 8) Какие отрезки называются равными? Какие два луча называются равными?
- 9) Докажите, что любые две точки луча не разделяются его начальной точкой.
- 10) Перечислите аксиомы принадлежности точек и прямых.
- 11) Сформулируйте аксиомы измерения отрезков и углов.
- 12) Докажите, что если два угла равны, то смежные с ними углы также равны.
- 13) Перечислите аксиомы откладывания отрезков и углов.
- 14) Докажите на основании аксиом I-III теорему о равенстве вертикальных углов.
- 15) Какие две прямые на плоскости называются параллельными? Сформулируйте аксиому параллельности.
- 16) На конечном множестве постройте интерпретацию I группы аксиом Гильберта.
- 17) Пользуясь только аксиомами I группы Гильберта, докажите, что каждой плоскости принадлежат по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.
- 18) Пользуясь только аксиомами I группы Гильберта, докажите, что множество внутренних точек отрезка не пусто.

§4. Система аксиом Вейля и ее непротиворечивость

После системы аксиом Гильберта вскоре появились системы аксиом Пеано, Кагана, Шура и другие. В 1918 г. немецким математиком Г. Вейлем была предложена точечно-векторная аксиоматика евклидовой геометрии.

Система аксиом Вейля описывает шесть понятий, два из которых – точки и векторы – называются *основными объектами*. Понятия «сложение векторов», «умножение вектора на число», «скалярное умножение векторов» и «откладывание вектора от точки» называются *основными отношениями*. Аксиомы Вейля распределяются на пять групп, причем аксиомы первых трех и первых четырех групп составляют соответственно *аксиоматику аффинного и евклидова векторного пространств*. Совокупности всех точек и векторов обозначаются соответственно символами T и V .

I. Аксиомы сложения векторов.

Первая группа аксиом описывает отображение $\varphi_1 : V \times V \rightarrow V$ называемое операцией *сложения векторов*, которая позволяет поставить в соответствие любым двум векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ третий вектор $\varphi_1(\vec{x}, \vec{y})$, называемый *суммой векторов* $\vec{x}$, $\vec{y}$ и обозначаемый символом $\vec{x} + \vec{y}$. Операция сложения векторов удовлетворяет следующим аксиомам:

1. Сложение векторов коммутативно: для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо равенство

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

т.е.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{y} + \vec{x})$$

2. Сложение векторов ассоциативно: для любых трех векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ справедливо равенство

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}),$$

т.е.

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \quad ((\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})).$$

3. Существует такой вектор $\vec{\Theta}$, что для любого вектора $\vec{x}$

$$\vec{x} + \vec{\Theta} = \vec{x},$$

т.е.

$$\exists \vec{\Theta} \in V, \forall \vec{x} \in V \quad (\vec{x} + \vec{\Theta} = \vec{x}).$$

4. Для любого вектора $\vec{x}$ существует такой вектор $\vec{x}'$, что

$$\vec{x} + \vec{x}' = \vec{\Theta},$$

т.е.

$$\forall \vec{x} \in V, \exists \vec{x}' \in V \quad (\vec{x} + \vec{x}' = \vec{\Theta}).$$

Вектор $\vec{\Theta}$ называется *нулевым*, а $\vec{x}'$ – вектором, противоположным вектору $\vec{x}$ и обозначается $\vec{x}' = -\vec{x}$.

II. Аксиомы умножения вектора на действительных число.

Вторая группа аксиом описывает отображение $\varphi_2 : V \times R \rightarrow V$, называемое операцией умножения вектора на действительное число. Каждому вектору $\vec{x}$ и числу $\lambda \in R$ однозначно сопоставляется вектор $\varphi_2(\lambda, \vec{x})$, называемый *произведением* вектора $\vec{x}$ на число λ и обозначаемый символом $\lambda \vec{x}$.

Операция умножения вектора на действительное число удовлетворяет следующим аксиомам:

1. Операция дистрибутивна относительно сложения векторов: для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и любого действительного числа λ справедливо равенство

$$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y},$$

т.е.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad \forall \lambda \in R \quad (\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}).$$

2. Операция φ_2 дистрибутивна относительно сложения чисел: для любого вектора $\vec{x}$ и любых действительных чисел λ , μ справедливо равенство

$$(\lambda + \mu) \vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x},$$

т.е.

$$\forall \vec{x} \in V \quad \forall \lambda, \mu \in R \quad ((\lambda + \mu) \vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x}).$$

3. Операция φ_2 ассоциативна: для любого вектора $\vec{x}$ и любых действительных чисел λ , μ выполняется равенство

$$\lambda(\mu \vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x},$$

т.е.

$$\forall \vec{x} \in V \forall \lambda, \mu \in R \quad (\lambda(\mu \vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x})$$

4. Операция φ_2 умножения вектора $\vec{x}$ на единицу не изменяет вектора $\vec{x}$:

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x},$$

т.е.

$$\forall \vec{x} \in V (1 \cdot \vec{x} = \vec{x}).$$

Аксиомы I—II позволяют определить понятие векторного пространства.

Векторным пространством над полем действительных чисел R называется множество V , для элементов (векторов) которого определены операции сложения векторов $\varphi_1(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$ и умножения вектора на действительное число $\varphi_2(\lambda, \vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$ так, что выполняется требования аксиом I-II.

Векторное пространство является математической структурой: $(V, \varphi_1, \varphi_2)$ с базисным множеством V и операциями φ_1, φ_2 .

Напомним понятие изоморфизма векторных пространств V и V' . Взаимно однозначное отображение f векторного пространства V на векторное пространство V' ($f: V \rightarrow V'$) называется *изоморфизмом*, если оно переводит сумму любых двух векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V$ и произведение вектора $\vec{x}$ на число λ соответственно в сумму $f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ и произведение $\lambda f(\vec{x})$, т.е. если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V$ и любого числа $\lambda \in R$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}),$$

$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

Векторные пространства V и V' называются *изоморфными*, если существует по крайней мере один изоморфизм V на V' .

Из определения изоморфизма следует, что 1) тождественное отображение $V \rightarrow V$ является изоморфизмом; 2) отображение, обратное изоморфизму, является изоморфизмом; 3) если $f_1: V \rightarrow V'$ и $f_2: V' \rightarrow V''$ — изоморфизмы, то отображение $f_2 \circ f_1$ пространства V на пространство V'' также является изоморфизмом. Следовательно, *отношение изоморфизма*

является отношением эквивалентности (т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно).

Прежде чем перейти к формулировке аксиом размерности, напомним ряд понятий из курса алгебры.

Система векторов

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k \quad (4.1)$$

называется *линейно независимой*, если равенство

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k = \vec{\Theta}, \quad (4.2)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in R$, возможно лишь в том случае, когда все $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ равны нулю; в противном случае система (4.1) линейно зависима.

Вектор

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k \quad (4.3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in R$, называется линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$.

Линейная комбинация вида

$$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_k$$

(равная нулевому вектору) называется *тривиальной*; линейная комбинация (4.3) называется *нетривиальной*, если в ней хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ не равен нулю.

В случае линейной зависимости системы векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ нулевой вектор может быть представлен в виде нетривиальной комбинации векторов, в случае же линейной независимости — только в виде тривиальной.

III. Аксиомы размерности.

1. Существуют три линейно независимых вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 = \vec{\Theta} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

2. Любые четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ линейно зависимы:

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in R$$

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} + \lambda_4 \vec{d} = \vec{\Theta} \Rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \neq 0.$$

Аксиомы I—III позволяют ввести понятие трехмерного векторного пространства.

Векторное пространство V называется *трехмерным векторным*

пространством V_3 над полем R , если выполняются аксиомы 1-2 размерности.

Чтобы получить аксиоматику n -мерного векторного пространства над полем R , аксиомы 1-2 заменяют на следующие:

1'. Существует n линейно независимых векторов:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$$

2'. Всякая система, содержащая $n + 1$ вектор, линейно зависима.

Множество V , для элементов которого определены операции сложения и умножения их на действительные числа с соблюдением перечисленных выше свойств (аксиом I—III), называется n -мерным векторным пространством и обозначается символом V_n . (Элементы пространства V_n называются векторами).

Любая система n линейно независимых векторов пространства V_n называется базисом (например, система $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$). При $n = 3$ аксиомы 1', 2' совпадают с аксиомами III, 1-2.

В пособии, в основном, будут рассматриваться аффинные и евклидовы пространства двух и трех измерений: если взять аксиомы размерности в виде III, 1'-2', то многие результаты легко могут быть обобщены на случай n -мерных пространств.

IV. Аксиомы скалярного произведения векторов.

Четвертая группа аксиом описывает отображение $\varphi_3: V \times V \rightarrow R$, называемое операцией *скалярного умножения векторов*. Эта операция позволяет любым двум векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ однозначно отнести действительное число $\varphi_3(\vec{x}, \vec{y})$. В дальнейшем *скалярное произведение векторов* $\vec{x}, \vec{y}$ обозначается таким образом: $\varphi_3(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$.

Перечислим аксиомы скалярного произведения векторов.

1. Скалярное произведение $\vec{x} \cdot \vec{y}$ коммутативно, т.е. для любых двух векторов $\vec{x}, \vec{y}$ выполняется равенство:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}.$$

т.е.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}).$$

2. Скалярное произведение векторов линейно: для любых трех векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ и действительных чисел λ, μ выполняется равенство

$$\vec{x} \cdot (\lambda \vec{y} + \mu \vec{z}) = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\mu \vec{x} \cdot \vec{z}),$$

т. е.

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \lambda, \mu \in R \quad (\vec{x} \cdot (\lambda \vec{y} + \mu \vec{z}) = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\mu \vec{x} \cdot \vec{z})),$$

3. $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$, если $\vec{x} \neq \vec{\Theta}$; $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$, если $\vec{x} = \vec{\Theta}$.

Аксиомы групп I—IV позволяют ввести понятия евклидова векторного пространства и изоморфизма таких пространств.

Векторное пространство V_3 , в котором определена операция скалярного умножения векторов так, что выполняются требования аксиом IV, 1-3, называется *евклидовым векторным пространством* V_3 .

Два евклидовых векторных пространства V и V' называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное линейное отображение f пространства V на V' , сохраняющее операцию скалярного умножения векторов.

Если $V=V'$, то отображение f (изоморфизм) называется *автоморфизмом пространства* V .

Отметим, что евклидово векторное пространство является математической структурой: $(V, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ с базисным множеством V и операциями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Неотрицательная величина

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

называется *длиной вектора* $\vec{x}$.

Углом между векторами $\vec{x}, \vec{y}$ называется число $\varphi (0 \leq \varphi \leq \pi)$, определяемое из условия

$$\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}.$$

Из курса алгебры известно, что для $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)$ выполняется неравенство Коши - Буняковского

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|, \text{ т.е. } \frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \leq 1,$$

а, значит, определение угла между двумя векторами – корректное.

В пространстве V_3 можно построить ортонормированный базис, т.е. базис

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3,$$

состоящий из попарно ортогональных и единичных векторов:

$$\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = 1, \vec{e}_1 \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \vec{e}_3 = 0$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{x}, \vec{y}$, скалярный квадрат вектора и косинус угла между двумя векторами в ортонормированном базисе выражаются соответственно формулами:

$$\vec{x} \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \quad (4.4)$$

$$\vec{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad (4.5)$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}, \quad (4.6)$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты вектора $\vec{x}$; y_1, y_2, y_3 — координаты вектора $\vec{y}$ в данном базисе.

V. Аксиомы откладывания векторов

Эта группа аксиом описывает операцию откладывания векторов $\varphi_4: T \times T \rightarrow V$, сопоставляющую двум упорядоченным точкам $A, B \in T$, вектор $\varphi_4(A, B)$ из векторного пространства V , обозначаемый символом

$\overrightarrow{AB}$, где A — начальная точка вектора $\overrightarrow{AB}$, а B — конечная.

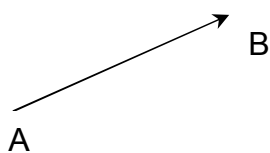


Рис.15

Операция откладывания φ_4 , определяется следующими аксиомами:

1. Для каждой фиксированной точки $A \in T$ отображение $T \rightarrow V$, определенное по закону

$$\varphi_4(A, B) = \overrightarrow{AB},$$

является взаимно однозначным отображением множества точек $B \in T$ на множество векторов V (рис. 15).

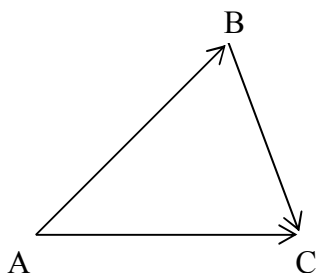


Рис.16

2. Для любых трех точек A, B, C справедливо равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

(аксиома треугольника) (рис.16).

О некоторых следствиях из аксиом I—V.

Аксиомами групп I—V исчерпывается аксиоматика Вейля.

Определяемая этими аксиомами теория теперь может быть построена посредством строгих логических выводов.

Докажем некоторые теоремы, непосредственно вытекающие из аксиом I—V.

Теорема 1. Любой из векторов $\overrightarrow{AA}$ ($A \in T$) является нулевым вектором пространства V .

Действительно, для любых точек $A, X \in T$ справедливо равенство

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AX}.$$

Так как $\overrightarrow{AX}$ может быть любым вектором пространства V , то вектор $\overrightarrow{AA} = \vec{\Theta}$.

Теорема 2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

В самом деле, полагая в аксиоме треугольника (V_2) $C = A$, получим:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{\Theta},$$

т.е. векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ — противоположные.

Теорема 3. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{\Theta}$, то точки A и B совпадают. (Доказать самостоятельно, применяя аксиому V_2 , затем V_1).

Непротиворечивость системы аксиом Вейля.

Перейдем к доказательству непротиворечивости системы аксиом Вейля. С этой целью построим модель системы аксиом I-V, называемую *арифметической*, так как ее векторы и точки являются упорядоченными наборами чисел, а, значит, непротиворечивость системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства будет установлена при условии непротиворечивости теории действительных чисел.

Назовем *точкой* или *вектором* любой упорядоченный набор трех

действительных чисел x_1, x_2, x_3 . При этом для обозначения точек будут использоваться круглые скобки, а для обозначения векторов – фигурные:

$$(x_1, x_2, x_3), \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Числа x_1, x_2, x_3 назовем *координатами точки* (соответственно вектора). Сложение векторов по определению будем осуществлять по координатам:

$$\{x_1, x_2, x_3\} + \{y_1, y_2, y_3\} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\}.$$

Требования аксиом I, 1-4 при этом будут удовлетворены, в чем можно легко убедиться непосредственной проверкой.

Умножение *действительного числа* λ на вектор $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ понимается как обычное умножение числа λ на каждое из чисел x_1, x_2, x_3 :

$$\lambda \bar{x} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}.$$

Так определенная операция умножения удовлетворяет всем аксиомам II, 1-4.

Аксиомы III, 1-2, очевидно, также выполняются: векторы

$$\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}$$

линейно независимы и образуют базис пространства, т. е. любой вектор $\{x_1, x_2, x_3\}$ является их линейной комбинацией.

Теперь определим операцию скалярного произведения двух векторов. Пусть $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\bar{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ – произвольные векторы. Скалярным *произведением векторов* $\bar{x}$, $\bar{y}$ называется величина

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Так определенная операция удовлетворяет требованиям аксиом IV, 1-3.

Рассмотрим, наконец, аксиомы V, 1-2 откладывания векторов и докажем их выполнимость в нашей интерпретации. Прежде всего определим отображение $\sigma: T \times T \rightarrow V$, полагая (для любых двух точек $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$)

$$\varphi_4(A, B) = \overrightarrow{AB} = \{b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3\}$$

Обратимся к аксиоме V, 1, которая утверждает для данной произвольной точки $A(a_1, a_2, a_3)$ и данного вектора $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ существование такой точки $B(b_1, b_2, b_3)$, что $\overrightarrow{AB} = \bar{x}$. Эта аксиома выполняется. Действительно, искомая точка B определяется следующим

упорядоченным набором чисел:

$$b_1 = a_1 + x_1, b_2 = a_2 + x_2, b_3 = a_3 + x_3$$

Убедимся теперь в справедливости аксиомы V_2 , в соответствии с которой $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ для любых трех точек A, B, C .

Пусть $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$. Отсюда следует, что

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2, c_3 - b_3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ определяется следующим набором чисел:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3),$$

т. е. он равен вектору $\overrightarrow{AC}$.

Итак, все аксиомы I-V выполнены, и мы приходим к следующему важному выводу: *система аксиом Вейля евклидовой геометрии непротиворечива, если непротиворечива арифметика действительных чисел.*

Вопросы и упражнения

1. Дайте общую характеристику системы аксиом Вейля. Перечислите аксиомы I-III групп (аксиомы сложения векторов, умножения вектора на число, аксиомы размерности) и следствия из аксиом I-III групп.
2. Перечислите аксиомы IV-V групп (аксиомы скалярного произведения, аксиомы откладывания векторов от точки). Дайте определение евклидова пространства по Вейлю как математической структуры.
3. Приведите определения понятий прямой, луча, отрезка, плоскости, параллелограмма, квадрата в аксиоматике Вейля.
4. Определите основные понятия системы аксиом Вейля в арифметической модели.
5. Проверьте выполнение аксиом I-III групп аксиоматики Вейля в арифметической модели.

6. Проверьте выполнение аксиом IV-V групп аксиоматики Вейля в арифметической модели.
7. Докажите, что система аксиом Вейля является полной.
8. Докажите неравенство треугольника, используя аксиоматику Вейля.
9. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
10. Докажите, что в евклидовой геометрии не существует прямой, пересекающей все стороны треугольника.
11. Используя аксиоматику Вейля, докажите:
 - а) теорему о средней линии треугольника;
 - б) теорему косинусов;
 - в) теорему синусов;
 - г) теорему о двух перпендикулярах;
 - д) теорему о трех перпендикулярах.
12. Докажите эквивалентность систем аксиом Вейля и Гильберта евклидовой геометрии.

§5. Система аксиом А.Д. Александрова

В качестве следующего примера приведем систему аксиом А.Д.Александрова евклидовой планиметрии. Особенностью этой системы аксиом является ее практическое основание. А именно, основными объектами системы аксиом А.Д. Александрова являются *точка* и *отрезок*. Ведь в обычной жизни мы больше имеем дело с отрезками, а не с прямыми, как бесконечными объектами.

Итак, перейдем к изложению системы аксиом А.Д.Александрова.

Основные объекты: 1) точки; 2) отрезки.

Основные отношения: 1) точка служит концом отрезка; 2) точка лежит на отрезке (или, как еще говорят, лежит внутри отрезка); 3) два отрезка равны друг другу (или, что равносильно, один отрезок равен другому).

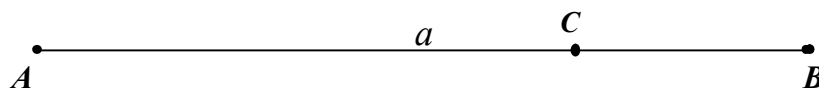


Рис. 17

Точки обозначаются, как обычно: A , B и т. п.; отрезки: a , b и т. п. Если точка C лежит на отрезке a , то кратко пишем: C на a (рис. 17).

Точки, лежащие на отрезке, а также его концы считаются точками этого отрезка, т. е. точка C принадлежит отрезку a (или является точкой отрезка a), если она либо лежит на нем, либо служит его концом (это записывается так: $C \in a$).

Теперь, пользуясь основными понятиями, определим некоторые другие начальные понятия геометрии (не обязательно придерживаясь принятой в школе формы определения со словом «называется»).

1. Отрезок a содержится в отрезке b (в записи: $a \subset b$), если все его точки являются также точками отрезка b .
2. Отрезки a , b образуют отрезок c (в записи: $a \cup b = c$), если они содержатся в c и у c нет точек, не принадлежащих им.
3. Отрезок a отложен вдоль отрезка b от его конца A , если у этих отрезков есть общий конец A и один содержится в другом: или

$a \subset b$, или $b \subset a$ (рис. 18). Говорим также, что такие отрезки налегают один на другой.

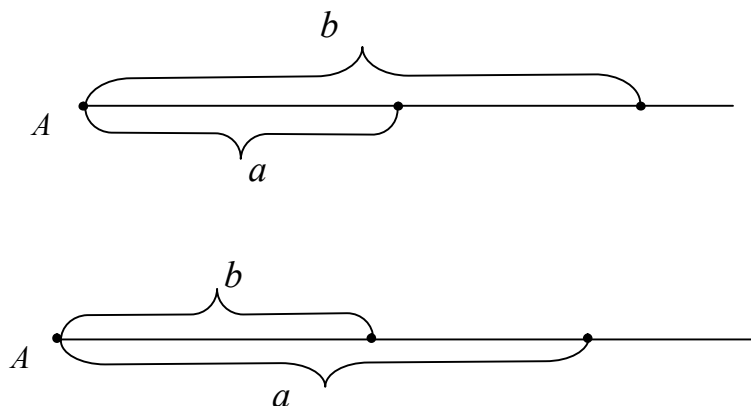


Рис.18

4. Два отрезка пересекаются, если на них есть единственная общая точка.

Мы излагаем основания планиметрии – геометрии на плоскости. Само понятие плоскости в них не упоминается; в них плоскость – это то пространство, та среда, где выполняются высказываемые далее аксиомы и соответственно «разыгрывается» основанная на них геометрия.

Подчеркнем еще раз, что при аксиоматическом изложении геометрии основные понятия заранее не определяются; все, что от них требуется, должно быть высказано в аксиомах. Но смысл основных понятий и содержание аксиом отражает то, откуда возникли эти понятия. Наши основные объекты можно определить из их исходного наглядного смысла.

Точка – это мысленный образ предельно точно определенного места, так что в нем уже не различаются разные места. По Евклиду «точка – это то, что не имеет частей».

Отрезок – это мысленный образ туго натянутой нити, лишенной всякой толщины.

Но такие определения носят «предматематический» характер, и их не следует путать с математическими определениями.

Аксиомы планиметрии

Теперь мы сформулируем аксиомы планиметрии системы аксиом А.Д.Александрова. Среди них мы легко узнаем утверждения, которые можно вывести из обобщения практического опыта. К ним мы присоединяем две аксиомы, выражающие такие свойства отрезков, как то, что у каждого отрезка два конца, и что всякая точка, лежащая на отрезке, делит его на два отрезка. Понятно, что в наглядном представлении и в практике эти свойства подразумеваются сами собой. Но теперь мы должны их явно выразить.

Дело в том, что понятие отрезка в аксиоматике А.Д.Александрова основное, так что мы не формулируем в геометрии его определение. Но для того, чтобы исходя, из этого понятия делать выводы, нужно явно указать все те свойства отрезков, которыми мы будем пользоваться.

Кроме того, автор формулирует еще одну аксиому – «аксиому непрерывности», не выводимую непосредственно из практики, однако без нее полное построение планиметрии невозможно.

Все аксиомы делятся на две группы: 1) линейные и 2) плоскостные. К первым относятся те аксиомы, в которых не присутствует представление о плоскости, так что они могли бы относиться к точкам и отрезкам, лежащим на одной прямой. Поэтому их автор называет линейными. Плоскостные аксиомы касаются фигур, не укладывающихся на прямой. (Говоря здесь о прямой и плоскости, мы понимаем их в наглядном смысле; понятие о них в аксиоматику не включается, так что сказанное представляет собой только пояснение к разделению аксиом на линейные и плоскостные.)

Сформулируем аксиомы.

Линейные аксиомы. Они делятся на три подгруппы.

I. *Аксиомы связи.* Это те аксиомы, в которых участвуют только такие отношения: точка лежит на отрезке или является его концом.

I₁ (аксиома существования). Существует хотя бы один отрезок; у каждого отрезка есть два и только два конца; кроме того отрезок содержит другие точки: точки, лежащие на отрезке.

Говорят, что отрезок соединяет точки, служащие его концами.

I_2 (аксиома проведения отрезка). Любые две точки можно соединить отрезком и притом только одним. Другими словами, для каждой двух точек существует и притом единственный отрезок, концами которого они служат.

Отрезок с концами A , B обозначается AB . По аксиоме I_1 у каждого отрезка два и только два конца, а по аксиоме I_2 отрезок с данными концами только один. Поэтому всякий отрезок можно обозначать его концами, и это обозначение однозначно. Наряду с выражениями «существует отрезок», «рассмотрим отрезок», мы будем в том же смысле употреблять такие: «можно провести отрезок», «проведем отрезок» и т. п.

I_3 (аксиома деления отрезка). Всякая точка, лежащая на отрезке, делит его на два отрезка, то есть если C лежит на отрезке AB , то отрезки AC , BC образуют вместе отрезок AB и не имеют общих точек кроме C .

I_4 (аксиома соединения отрезков). Если точка C лежит на отрезке AB , а B на CD , то отрезки AB , CD образуют отрезок AD .

II. *Аксиомы равенства*. Это аксиомы, в которых фигурирует отношение равенства отрезков.

II_1 (аксиома откладывания отрезка). При любых двух отрезках AB , MN существует и притом единственный отрезок AC , равный MN и налегающий на AB . Другими словами: при любых отрезках AB , MN , можно отложить вдоль AB отрезок AC , равный MN , и притом только один.

II_2 (аксиома сравнения). Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны друг другу.

II_3 (аксиома сложения). Если C на AB , C_1 на A_1B_1 , и $AC=A_1C_1$, то $AB=A_1B_1$.

II_4 (аксиома Архимеда). При любых данных отрезках $a, b=AB$ существует содержащий AB отрезок AA_n , на котором есть такие точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, что все отрезки $AA_1=A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$ равны a . Короче – при любых отрезках a, b можно отложить вдоль b отрезки, равные a , столько раз, что они «покроют» b .

В следующей подгруппе только одна аксиома.

III. *Аксиома непрерывности.* Если имеется бесконечная последовательность вложенных отрезков, т. е. если $A_1B_1 \supset A_2B_2 \dots$, то существует точка, общая всем этим отрезкам (рис. 19).

Эта аксиома не выводится непосредственно из практики, подобно

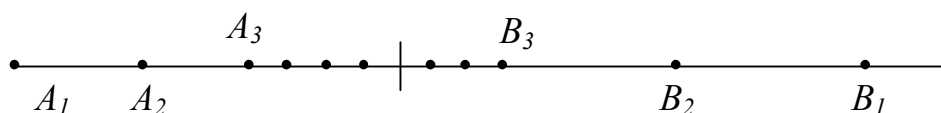


Рис.19

остальным, поскольку в ней говорится о бесконечной последовательности отрезков. Она формулируется отдельно от остальных аксиом. Впрочем, ее смысл достаточно ясен. Представим себе на отрезке AB стягивающиеся отрезки $A_1B_1 \supset A_2B_2 \dots$ так, что точки $A_1, A_2, \dots$ и $B_1, B_2, \dots$ неограниченно сближаются. Если бы между ними не было точки, то отрезок AB не был бы сплошным, непрерывным, тут был бы в нем разрыв.

Аксиома утверждает, что это исключено: всякий отрезок сплошной, в нем нет разрывов.

Плоскостные аксиомы. Этих аксиом всего три, и мы обозначим их IV_1, IV_2, IV_3 .

Пусть a – какой-либо отрезок. Для точек, не лежащих ни на каком отрезке, содержащем a , введем определение.

1. Точки C, D лежат с одной стороны от a , если отрезок CD не пересекает никакого отрезка, содержащего a .

2. Точки A, B лежат с разных сторон от a , если напротив, отрезок AB пересекает какой – либо отрезок, содержащий a (рис. 20).

IV_1 (*аксиома деления плоскости*). По отношению к каждому данному отрезку a все точки, не лежащие ни на каком отрезке, содержащем a , делятся на два класса: в один класс входят точки, лежащие с одной стороны от a , а в другой – точки, лежащие с другой стороны от a , причем в каждом классе есть точки.

Если мы говорим о точках, «лежащих с данной стороны от отрезка a », то это значит, что они входят в один, из указанных классов, и класс задается какой-нибудь его точкой. Можно сказать, что данная сторона отрезка a «дана» тем, что указывается точка, не лежащая ни на каком

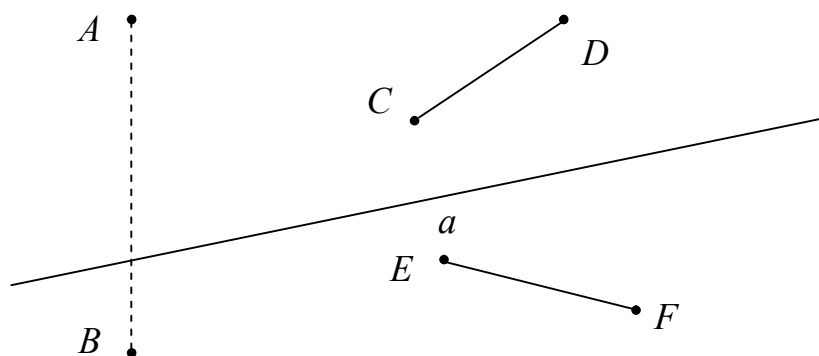


Рис.20

отрезке, содержащем a . В этом смысле понятны выражения «с данной стороны от a », «с одной и с другой стороны от a ». Именно в этом смысле мы говорим об откладывании угла по данную сторону какого – либо отрезка.

Угол «образуется» двумя отрезками с общим концом. В соответствии с этим, определяя угол через аксиоматически введенные понятия, можно сказать, угол – это пара отрезков с общим концом, эти отрезки – стороны угла, их общий конец – вершина угла. Однако нас интересуют только те свойства угла, которые не изменяются, если вместо этих сторон взять другие отрезка, на них налегающие, с общим концом в той же вершине. О таких парах отрезков мы говорим, что они представляют (образуют) один и тот же угол и также служат его сторонами, т. е. угол рассматривается с точностью до «удлинения или укорочения» сторон. Ниже слово угол, а также – стороны угла, будет употребляться в этих двух легко различимых контекста смыслах, т. е. либо как два данных отрезка с общим концом, либо как любые два отрезка из представляющих один и тот же угол.

- 1) Каждый из отрезков лежит целиком с одной стороны от другого, т. е. все его точки, кроме общего конца, лежат с одной стороны. В этом случае мы говорим, что угол, образованный отрезками, настоящий.
- 2) Отрезки служат один продолжением другого, т. е. образуют один отрезок и не имеют общих точек помимо общей вершины; тогда угол развернутый.
- 3) Отрезки налегают один на другой; тогда угол нулевой. В дальнейшем мы вовсе исключаем нулевой угол, так что слово «угол» всегда будет

обозначать настоящий или развернутый угол.

Угол обозначается либо вершиной, либо сторонами: $\angle O$ – угол с вершиной O , $\angle ab$ – угол со сторонами a , b (когда же отрезки обозначаются концами, то угол со сторонами OP , OQ обозначают $\angle POQ$ или $\angle QOP$).

Если отрезок a служит стороной, а его конец A – вершиной настоящего угла, то говорим, что угол отложен от отрезка a , от его конца A . Угол считается отложенным по ту сторону от отрезка a , где лежит его вторая сторона (понятно, кроме вершины A).

Определим равенство углов, используя понятие равенства отрезков.

Поперечиной угла называется отрезок с концами на сторонах угла. Поперечины AB , A_1B_1 углов O , O_1 , соответственные, если $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$.

Углы равны, если у них есть равные соответственные поперечины. Подчеркнем существенный момент, что равенство углов может определяться любой парой соответственных поперечин. Если речь идет о равенстве углов O , O_1 и в угле O взята поперечина AB , то можно сказать, что мы определяем равенство углов O , O_1 , пользуясь поперечиной AB .

IV_2 (*аксиома откладывания угла*). От каждого отрезка по данную сторону от него, от данного его конца можно отложить угол, равный данному (настоящему) углу. При этом можно пользоваться любой поперечиной и угол будет всегда один и тот же (в смысле данного выше определения «с точностью до продолжения и укорочения сторон»).

Согласно определениям понятий поперечины и равенства углов, сказанное можно раскрыть следующим образом.

Пусть даны угол POQ и отрезок O_1P_1 . Какие точки A , B на сторонах угла POQ ни взять, можно провести отрезок O_1Q_1 с данной стороны от O_1P_1 так, что если A_1 на O_1P_1 , B_1 на O_1Q_1 и $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$, то

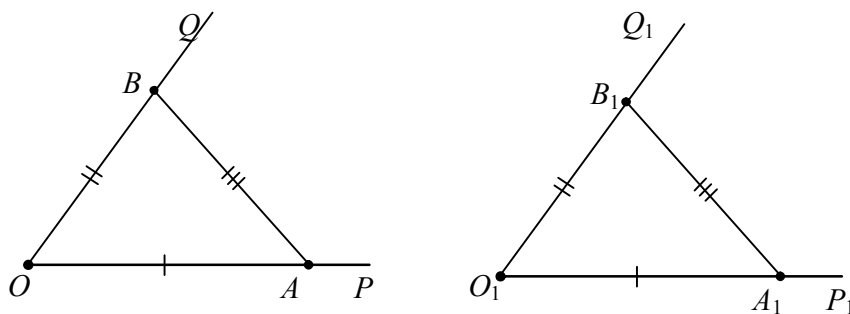


Рис.21

$A_1B_1=AB$. При этом угол $P_1O_1Q_1$ будет тот же самый (в смысле, указанном в самом определении угла) при любых точках A, B на сторонах угла POQ (рис. 21).

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие образуют вместе один отрезок, не налегая друг на друга (рис.22). Угол, равный своему смежному, называется *прямым* (рис. 23).

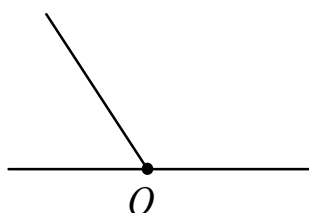


Рис.22

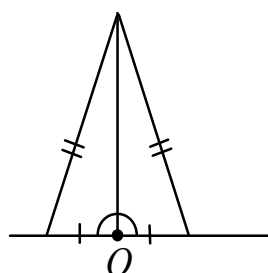
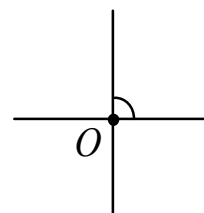


Рис.23



IV_3 (аксиома параллельных отрезков).

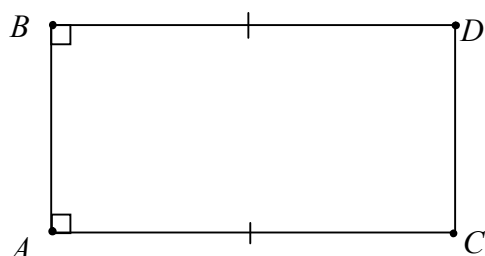


Рис.24

Если отрезки AC, BD равны и идут в одну сторону от отрезка AB под прямым углом, то $CD = AB$ (см. 24). Отрезки AC, BD мы называем *параллельными*. На этом перечень аксиом завершается.

Далее читателю предлагается самостоятельно получить ближайшие следствия из системы аксиом А.Д. Александрова, ввести понятие луча, прямой, доказать ряд теорем курса планиметрии.

Вопросы и упражнения

1. Введите понятие луча, прямой в евклидовой планиметрии построенной на основе системы аксиом А.Д.Александрова.
2. Докажите признаки равенства треугольников на основе системы аксиом А.Д. Александрова.
3. Докажите теорему о сумме углов треугольника в аксиоматике А.Д.Александрова.
4. Докажите теорему Пифагора в аксиоматике А.Д.Александрова.

II. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ОБОСНОВАНИЯ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

§6. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Проблема V постулата

1. Геометрия до Евклида.

Геометрия возникла в древнем Вавилоне и Египте. Первые геометрические знания носили практический характер и были связаны с измерением площадей земельных участков, сравнение отрезков и измерение поверхностей и объемов фигур.

В 7 в. до н.э. развитие геометрии перешло в древнюю Грецию. Греки, которые узнали о геометрии от египтян, назвали геометрию «геометрией» (землемерие). Отцом греческой геометрии является Фалес. Фалесу приписывают открытие доказательств свойств углов при основании равнобедренного треугольника, свойств вертикальных углов, теоремы Фалеса и некоторых других теорем. Далее: Пифагор (VI-V в до н.э.), Демокрит (V-IV в до н.э.), Платон (IV-III в до н.э.).

Все эти ученые имели свои математические школы. Известно, что воспитанники школы Пифагора открыли теорему о сумме углов треугольника, доказательство теоремы Пифагора, существование пяти типов правильных многогранников.

Платон рекомендовал своим ученикам, прежде чем заниматься философией изучить геометрию.

Демокрит открыл теоремы об объемах пирамиды и конуса.

Евдокс (V-IV в до н.э) создал теорию пропорций, заменившей грекам теорию иррациональных чисел, которых греки не знали.

Ученик Евдокса – МЕНЕХМ открыл конические сечения, которые затем обстоятельно изучил АППОЛОНИЙ.

Аристотель (IV-III в до н.э) – основатель формальной логики, сформулировал правила вывода.

Таким, образом, к началу III в. до н. э. греки имели большой запас геометрических фактов и методы их доказательства. Возникла задача

собрать этот геометрический материал и расположить его в логическом порядке. Такую задачу пытались решать многие греческие авторы (Гиппокрит, Федий и др.), но их сочинения не дошли до нашего времени и были забыты после появления «Начал» Евклида.

2.«Начала» Евклида.

Евклид (III в до н.э) – воспитанник школы Платона, преподавал математику в Александрии. Написанные им «Начала» дают систематическое изложение основ геометрии того времени. Евклид применил в «Началах» аксиоматический метод. «Начала» состоят из 13 книг (глав). Книги I-IV и VI посвящены планиметрии, XI-XIII – стереометрии, а остальные содержат элементы теории чисел и геометрически изложенной арифметики.

Каждая книга «Начал» начинается с определения тех понятий, которые впервые появляются в этой книге. Первая книга начинается с 23 определений. Приведем некоторые из них.

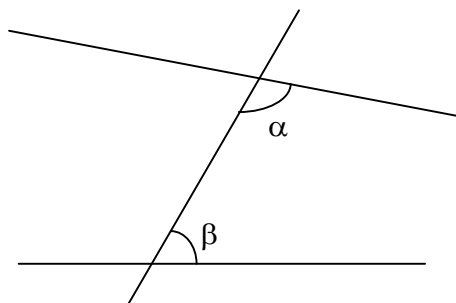
- 1.Точка есть то, что не имеет частей.
- 2.Линия есть длина без ширины.
- 3.Концы линии – точки.
- 4.Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.
- 5.Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
- 6.Границы поверхности – линии.
- 7.Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем лежащим на ней прямым.

Последнее определение в первой книге связано с параллельными прямыми. После определений идут постулаты (5) и аксиомы, их – 9.

Постулаты Евклида.

- I. Требуется, чтобы от всякой точки до всякой другой точки можно было провести прямую линию.
- II. И чтобы каждую прямую можно было непрерывно продолжать по прямой.
- III. Из любого центра можно описать окружность любого радиуса.
- IV. Все прямые углы равны между собой.

V. Если прямая, падающая на две прямые образует внутренние по одну сторону углы, сумма которых меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении эти прямые пересекаются с той стороны, где эта сумма меньше двух прямых.



$$\alpha + \beta < 2d$$

d – прямой угол

Рис.25.

Далее идут аксиомы, их – 9. Вот некоторые из них.

- 1.Равные порознь третьему равны между собой.
- 2.Если к равным прибавить равные, то получим равные.
- 3.Если от равных отнять равные, то и остатки равны.
4. Если к неравным прибавляются равные, то целые будут неравны.
5. Удвоенные одного и того же равны между собой.
6.
- 7.И совмещающиеся равны.
8.
9.

Далее идут теоремы, которые Евклид доказывает строго логическим путем на основании постулатов, аксиом и предыдущих теорем.

Евклид первым поставил задачу обоснования геометрии, т.е. перечисление определений и аксиом, на основе которых можно развивать геометрию строго логическим путем. В этом историческая заслуга Евклида перед наукой. «Начала» служили образцом научного изложения на протяжении 2000 лет. Со времен Евклида все учили геометрию по его «Началам». Школьные учебники практически до последнего времени представляли, по существу, популярное изложение «Начал».

Но с точки зрения современной математики «Начала» Евклида имеют и недостатки.

Евклид определяет все понятия, нет неопределенных понятий. Ни одно из определений 1-5 не используется в доказательстве теорем.

Список предложений, принятых без доказательства (постулатов и аксиом) является неполным. Так, например, нет аксиом, определяющих понятие «лежать между». Равенство фигур Евклид определяет через движение (7 аксиома), однако, аксиом движения нет, нет также аксиом непрерывности.

Система аксиом Евклида не является независимой. Например, IV постулат можно доказать как теорему.

3. Проблема V постулата и ее решение Н.И.Лобачевским.

Из всех постулатов и аксиом Евклида пятый постулат выделяется громоздкостью формулировки. Он сравнительно поздно используется в «Началах» (начиная с 29-го предложения). Это наводит на мысль, что Евклид пытался доказать V постулат как теорему. Поэтому с выходом «Начал» встала *проблема пятого постулата*: доказать пятый постулат на основании остальных четырех постулатов и девяти аксиом, т.е. был поставлен вопрос независимости пятого постулата.

Было множество попыток дать доказательство пятого постулата. Это была задача, над решением которой впоследствии безуспешно бились сотни геометров: Посидоний (I в. до н.э.), Прокл (V в. н.э.), Омар Хайям (11-12 в. н.э.), английский математик Валлис (17 в.) при доказательстве пятого постулата допустил существования подобных (но не равных друг другу) треугольников, что является эквивалентом пятого постулата.

Итальянский математик Саккери (18 в.) рассматривал, как и Хайям, четырехугольники $ABCD$ с двумя прямыми углами при основании AD и равными боковыми сторонами AB и DC .

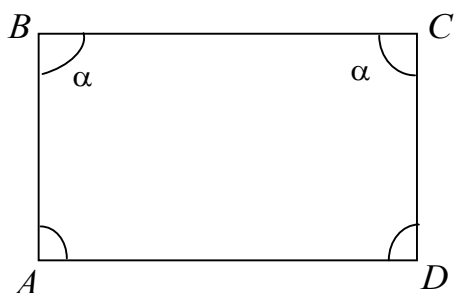


Рис 26.

Легко доказывается, что $\angle B = \angle C = \alpha$.

Возможны три предположения о величине угла α .

1. Угол α – острый. Гипотеза острого угла.

2. Угол α – тупой. Гипотеза тупого угла.

3. Угол α – прямой. Гипотеза прямого угла.

Саккери, как и Хайям, привел к противоречию следствия из гипотезы тупого угла, и как ему казалось, получил противоречие из гипотезы острого угла, что было ошибкой. Тогда осталась третья гипотеза – гипотеза прямого угла, а из нее вытекает V постулат Евклида.

Ламберт (18 в.) изучал четырехугольники с тремя прямыми углами, примыкая к идеям Саккери. В отличие от Саккери он не допускал в своих исследованиях ошибок и не утверждал, что доказал пятый постулат. Из полученной системы следствий гипотезы острого угла Ламберт пришел к утверждению, что «эта гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере».

Ламберт и Саккери стояли на пороге открытия неевклидовой геометрии. Много теорем из этой геометрии ими было получено, но открывателями ее они не стали из-за убеждения, что евклидова геометрия является единственно возможной непротиворечивой системой.

Французский математик Лежандр (18-19 в.в.) при доказательстве пятого постулата использовал допущение: сумма углов треугольника равна π и тогда справедлив пятый постулат Евклида. Но эти предложения эквивалентны.

Таким образом, все попытки доказательства пятого постулата оканчивались неудачей. Авторы доказательств использовали явным или скрытым образом предположения, которые при тщательном анализе оказывались эквивалентными пятому постулату.

Приведем предложение, эквивалентное пятому постулату Евклида, так называемое предложение Плейфера (19 в.).

«Через точку A в плоскости, определяемой точкой A и прямой a , можно провести не более одной прямой не пересекающей прямую a ». Это предложение стали называть аксиомой параллельности Евклида и использовать вместо пятого постулата (см. §3).

Проблема пятого постулата занимала математиков более двух тысяч лет. Впервые ее решил великий русский математик Н.И.Лобачевский.

Н.И.Лобачевский родился в 1792 г. в Н.Новгороде, он окончил гимназию при Казанском университете, затем Казанский университет,

после чего был оставлен там преподавателем. Став профессором, он продолжал работать в том же университете. В течение 19 лет (1827-1846) Н.И.Лобачевский был ректором Казанского университета, с 1846 по 1855гг. – помощником попечителя Казанского учебного округа. В 1856 г. Н.И.Лобачевский умер.

Лобачевский в первые годы своей педагогической деятельности тоже делал попытку доказать пятый постулат, но вскоре стал приходить к выводу, что совокупность теорем, получаемая в рассуждениях от противного, составляет новую, более общую геометрию по сравнению с евклидовой.

В 1826 г. Н.И.Лобачевский представил физико-математическому факультету Казанского университета доклад «Рассуждения о принципах геометрии», в котором приводилось доказательство того, что пятый постулат не может быть получен логическим путем из других постулатов и аксиом Евклида.

В 1829-1830 г.г. Лобачевский опубликовал свои исследования под названием «О началах геометрии», в последующие годы он издал еще ряд сочинений по геометрии.

Первая публикация Лобачевского по геометрии, в которой излагалась новая геометрия, была не понята ни русскими, ни зарубежными математиками.

В 1835-1838 г.г. он печатает «Воображаемую геометрию» и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Вскоре они были переведены на французский и немецкий языки.

Последний свой труд «Пангеометрия» изданный в 1855 г. Лобачевский диктовал своим ученикам, будучи слепым.

Н.И.Лобачевский создал новую геометрию, заменив Евклидов V постулат более общей аксиомой параллельности и сохранив другие постулаты и аксиомы Евклида.

Приведем аксиому параллельности Лобачевского V^* :

Через точку A , не лежащую на прямой a , в плоскости, определяемой

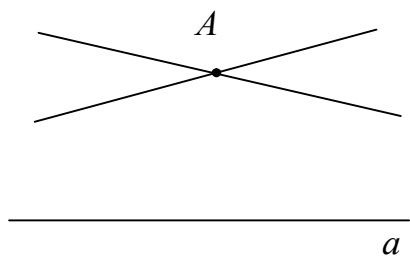


Рис.27.

точкой A и прямой a , можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающие прямую a .

Дальнейшие рассуждения привели Лобачевского к новой логически безупречной геометрической системе. Лобачевский развивает свою геометрию на плоскости и в пространстве, находит формулы тригонометрии и дает приложение анализа к геометрии. Лобачевский показал, что его геометрия может быть с пользой применена в математическом анализе: он вычислил много интегралов, которые до него не поддавались вычислению.

Открытие неевклидовой геометрии принадлежит к числу величайших достижений человеческой мысли. Независимо от Лобачевского новую геометрию открыли Я.Больяи в 1832 г. и К.Гаусс, который свои исследования не опубликовал.

Исследования Лобачевского показали, что наряду с геометрией Евклида, считавшейся единственно возможной геометрической системой, имеет место другая логически безупречная система – геометрия Н.И.Лобачевского. Это открытие послужило толчком к открытию других неевклидовых геометрий.

Вопросы и упражнения

1. Дайте характеристику «Начал» Евклида.
2. В чём состоит проблема пятого постулата Евклида?
3. Докажите, что в системе аксиом Гильберта каждое из следующих предложений эквивалентно аксиоме параллельности:
 - а) сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым;
 - б) если различные прямые a и b не перпендикулярны, то перпендикуляр, проведенный в любой точке прямой a , пересекает прямую b ;
 - в) каковы бы ни были три различные прямые, всегда существует прямая, отличная от данных прямых и пересекающая все три прямые в трех различных точках;
 - г) существует четырехугольник с четырьмя прямыми углами;

- д) существуют три различные коллинеарные точки, равноудаленные от данной прямой;
 - е) существует два подобных, но не конгруэнтных треугольника;
 - ж) через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит окружность;
 - з) угол, под которым виден диаметр окружности из какой-либо точки этой окружности, конгруэнтен прямому углу;
 - и) перпендикуляры, проведенные к серединам сторон любого треугольника, пересекаются в одной точке.
4. Кем и каким образом была решена проблема пятого постулата Евклида?

§7. Абсолютная геометрия и ее основные факты

Евклидова геометрия (как отмечалось в §3) может быть определена по Гильберту как геометрия всех пяти групп аксиом I–IV, V системы аксиом Гильберта, а евклидово пространство E^3 как математическая структура вида

$$E^3 = (M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) + \Sigma_{\Gamma}(I - IV, V).$$

Геометрия, построенная с помощью аксиом I–IV, V^* , где V^* – аксиома параллельности Лобачевского, называется геометрией Лобачевского.

Абсолютная геометрия – это геометрия построенная на первых четырех группах аксиом системы аксиом Гильберта. Ясно, что теоремы абсолютной геометрии одновременно являются теоремами евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского.

Таким образом, все следствия, которые можно получить из групп аксиом: I, I-II, I-III, I-IV системы аксиом Гильберта, включая и теорию длин отрезков, относятся к абсолютной геометрии. Эти следствия рассмотрены нами в §3.

В настоящей лекции мы остановимся на тех фактах абсолютной геометрии, которые не приведены ранее.

Итак, как отмечено выше, геометрия аксиом всех пяти групп аксиом I–IV, V называется *евклидовой геометрией*. Геометрия аксиом групп I–IV, V^* называется *геометрией Лобачевского*. Геометрия, построенная на первых четырех группах аксиом, называется *абсолютной геометрией*. Таким образом, в гильбертовой аксиоматике в основе евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского лежат три множества, элементы которых именуются соответственно точками, прямыми и плоскостями, причем между ними определены основные отношения p_1 – p_5 так, что удовлетворяются все требования аксиом I–IV, V или I–IV, V^* . Совокупность элементов указанных трех множеств и отношений p_1 – p_5 между ними называется соответственно *евклидовым пространством* и *пространством Лобачевского*. Если в первой группе аксиом взять лишь первые три аксиомы, а остальные группы аксиом II–IV, V и II–IV, V^* оставить без изменения, то получим соответственно плоскость Евклида и

плоскость Лобачевского.

В абсолютной геометрии можно построить понятие числовой оси. В самом деле, возьмем направленную прямую – ось и на ней некоторую точку O . Каждой точке данной прямой отнесем вещественное число по следующему правилу. Если точка O предшествует точке M , то соответствующее число равняется длине отрезка OM , если же точка M предшествует точке O , то число отличается знаком от длины отрезка. Условимся также относить точке O число нуль. Построенное отображение всех точек прямой на все вещественные числа взаимно однозначно – каждой точке соответствует число, разным точкам соответствуют разные числа и всякое вещественное число является сопоставленным с некоторой точкой прямой. Ось, точкам которой отнесены указанным способом вещественные числа, называется *числовой осью*. Можно убедиться, что построенное отображение сохраняет порядок, т. е. если точки M, N имеют координаты x_m, x_n , то точка M тогда и только тогда предшествует точке N , когда $x_m < x_n$. Это свойство прямой называется *непрерывностью*. Свойство непрерывности прямой позволяет установить в абсолютной геометрии следующее предложение Дедекинда:

Если все точки направленной прямой распределены по некоторому закону на два непустых класса так, что 1) каждая точка относится к одному и только одному классу; 2) каждая точка первого класса предшествует точкам второго класса, то существует точка, которая является либо последней точкой первого класса, либо первой точкой второго класса.

Обратно, если к аксиомам первых трех групп присоединить это предложение Дедекинда, то предложения Архимеда и Кантора, составляющие группу аксиом непрерывности, могут быть доказаны как теоремы. Другими словами, в геометрии I–III групп аксиом предложение Дедекинда эквивалентно предложению Архимеда и Кантора. Напомним, что предложения A и B эквивалентны относительно системы аксиом C , если из C и A следует предложение B , а из C и B следует предложение A .

Теперь нетрудно построить *систему координат* в плоскости абсолютной геометрии. Действительно, пусть две взаимно ортогональные прямые Ox и Oy пересекаются в точке O . На каждой из них выберем

положительное направление и при помощи единичного отрезка построим числовые оси Ox , Oy . Возьмем далее произвольную точку M на плоскости xOy и опустим из нее перпендикуляр $M\tilde{M}$ на ось Ox . Координату x точки $\tilde{M}$ оси Ox примем за абсциссу точки M . За ординату точки M примем длину отрезка $M\tilde{M}$ с положительным или отрицательным знаком в зависимости от того, лежит ли точка M и положительная полуось Oy соответственно по одну или по разные стороны относительно оси Ox .

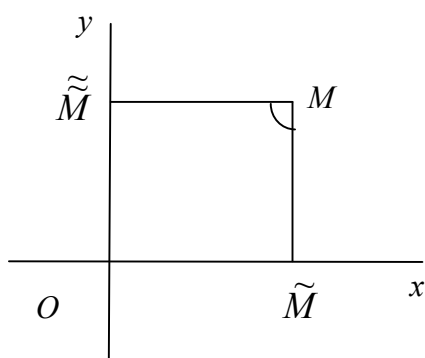


Рис. 28

Эта система координат не является прямоугольной декартовой, так как угол $\tilde{M}M\tilde{M}$, вообще говоря, не прямой, он может быть прямым и острым.

Далее приведем ряд теорем абсолютной геометрии, необходимых в дальнейшем.

Теорема 1. (Первая теорема Саккери - Лежандра)

Сумма углов любого треугольника в абсолютной геометрии не может быть больше $2d$ (двух прямых).

Доказательство.

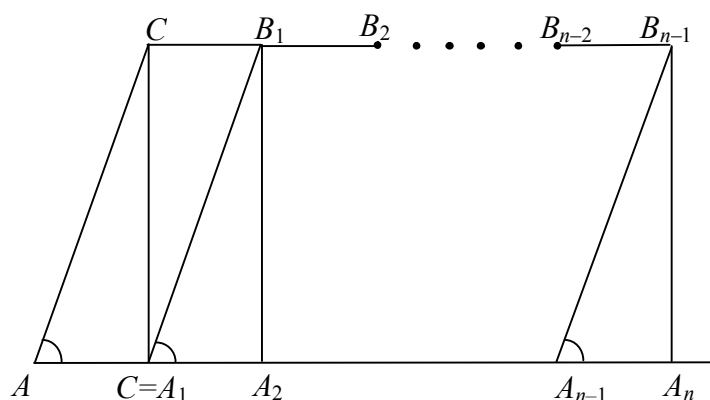


Рис.29

Пусть существует в абсолютной геометрии треугольник ABC , сумма углов которого больше двух прямых. Продолжим сторону AC треугольника. Построим последовательно, как указано на рисунке 29, $n-1$ треугольник, равный данному.

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
A_1A_2 &= A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = AC, \\
\angle B_1A_1A_n &= \angle B_2A_2A_n = \dots = \angle B_{n-1}A_{n-1}A_n = \angle BAC, \\
A_1B_1 &= A_2B_2 = \dots = A_{n-1}B_{n-1}.
\end{aligned}$$

Все треугольники равны друг другу по двум сторонам и заключенному между ними углу. Соединим отрезками пары точек $BB_1, B_1B_2, \dots, B_{n-2}B_{n-1}$. Заметим, что эти отрезки, вообще говоря, не принадлежат одной прямой. По условию имеем:

$$\angle A + \angle B + \angle C > 2d;$$

с другой стороны, $\angle A + \angle BCB_1 + \angle C = 2d$.

Отсюда следует, что $\angle B > \angle BCB_1$, т.е. стороны в треугольниках ABC и BB_1C , лежащие против указанных углов, связаны неравенством

$$AC > BB_1.$$

Учитывая, что ломаная $ABB_1 \dots B_{n-1}C$, больше замыкающей AA_n , получим:

$$AB + BB_1(n-1) + BC > nAC.$$

Переносим слагаемое nBB_1 в правую часть, будем иметь:

$$AB + BC - BB_1 > n(AC - BB_1).$$

Это неравенство содержит в левой части фиксированный отрезок $AB + BC - BB_1$, а в правой – отрезок $n(AC - BB_1)$, где n – произвольное натуральное число, что невозможно по аксиоме Архимеда.

Таким образом, предположение о существовании треугольника с суммой углов более $2d$ неверно. Теорема доказана.

Следующие теоремы приведем без доказательства.

Теорема 2. (Вторая теорема Саккери - Лежандра)

Если в одном треугольнике на плоскости абсолютной геометрии сумма углов равна $2d$, то сумма углов любого треугольника равна $2d$.

Следствие. Если в одном треугольнике сумма углов меньше $2d$, то сумма углов всякого треугольника меньше $2d$.

Теорема 3. (теорема Лежандра).

Если сумма углов треугольника равна $2d$, то выполняется аксиома параллельности Евклида.

Доказательство.

Пусть даны прямая a и точка $A \notin a$. Проведем $AB \perp a$, $a' \perp AB$, $A \in a'$. Известно, что $a \cap a' = \emptyset$. Докажем, что всякая другая прямая b , проходящая через точку A , пересекает прямую a в той полуплоскости с границей AB , которая содержит острый угол β (рис.30).

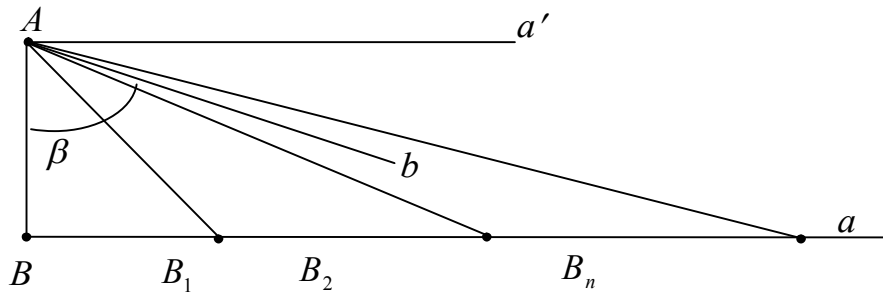


Рис.30

В этой полуплоскости отложим последовательно на прямой a отрезки $BB_1 = AB$, $B_1B_2 = AB_1, \dots$, $B_{n-1}B_n = AB_{n-1}$. Так как сумма углов каждого треугольника по условию равна $2d$ и треугольник ABB_1 равнобедренный, то

$$\angle BAB_1 = \angle AB_1B = \frac{d}{2}.$$

Но угол AB_1B – внешний угол равнобедренного треугольника AB_1B_2 , поэтому $\angle AB_2B_1 = \frac{d}{4}$. Продолжая далее, находим: $\angle AB_nB = \frac{d}{2^n} \Rightarrow$

$$\angle BAB_n = d - \frac{d}{2^n}.$$

По условию $\beta < d$. Можно взять столь большое n , что $\angle BAB_n > \beta$. Тогда получим, что прямая b проходит через вершину A треугольника ABB_n и пересекает его внутреннюю область. Отсюда можно заключить, что прямая b пересекает прямую a в некоторой точке, лежащей между точками B и B_n . Теорема доказана.

Вопросы и упражнения

1. Приведите определение абсолютной геометрии.
2. Как связаны абсолютная геометрия, евклидова геометрия и геометрия Лобачевского?
3. Входит ли в абсолютную геометрию следующее предположение: «Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним»?
4. Входит ли в абсолютную геометрию следующее предположение: «Все вписанные в окружность углы, стороны которых проходят через две данные точки окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, равны»?
5. Докажите, что если в одном треугольнике сумма углов равна двум прямым, то сумма углов любого треугольника равна двум прямым.
6. Докажите, что если в одном треугольнике сумма углов меньше двух прямых, то сумма углов любого треугольника меньше двух прямых.

§8. Геометрия Лобачевского.
Простейшие факты геометрии Лобачевского

1. Аксиоматическое определение пространства и плоскости
Лобачевского по Гильберту.

Пространство Лобачевского L^3 по Гильберту есть математическая структура следующего вида:

$$L^3 = (M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) + \Sigma_{\Gamma}^*(I-IV, V^*),$$

где M_1, M_2, M_3 соответственно множество точек прямых и плоскостей, p_1-p_4 – основные отношения, подробно описанные в §3, Σ_{Γ}^* – система аксиом Гильберта пространства Лобачевского, полученная из системы аксиом Гильберта Σ_{Γ} евклидовой геометрии заменой аксиомы параллельности V Евклида на ее отрицание – аксиому параллельности Лобачевского V^* .

Плоскость Лобачевского по Гильберту есть математическая структура вида:

$$L^2 = (M_1, M_2, p_1, p_3, p_4, p_5) + \Sigma_{\Gamma}^*(I_{1-3}II-IV, V^*),$$

т.е. это есть множество точек M_1 , прямых M_2 , с введенными над элементами этих множеств основными отношениями p_1 – принадлежность точки прямой), p_3 – лежать «между» для трёх точек, лежащих на одной прямой, p_4, p_5 – конгруэнтность отрезка отрезку и угла углу, удовлетворяющими системе аксиом Гильберта, в которой в первой группе взяты первые три аксиомы, а вместо V взята аксиома параллельности Лобачевского V^* .

Геометрию Лобачевского можно определить, как теорию построенную на основе системы аксиом $\Sigma_{\Gamma}^*(I-IV, V^*)$.

Можно сказать, что геометрия Лобачевского получается из абсолютной геометрии при предположении, что выполняется аксиома параллельности Лобачевского V^* .

Напомним эту аксиому: *через любую точку A , не лежащую на прямой a , можно провести в плоскости (A, a) по крайней мере две различные прямые, не пересекающие прямую a .*

2. Основные факты геометрии Лобачевского.

Рассмотрим основные факты планиметрии Лобачевского.

Теорема 1. Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше $2d$ (180°).

Доказательство.

По первой теореме Саккери -Лежандра сумма углов треугольника на плоскости абсолютной геометрии $S \leq 2d$. Если сумма углов треугольника равна $2d$, то выполняется аксиома параллельности Евклида V – теорема Лежандра, а на плоскости L^2 выполняется ее отрицание V^* , значит сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше $2d$ (180°).

Теорема 2. Сумма углов четырехугольника на плоскости Лобачевского меньше $4d$ (360°).

Доказательство.

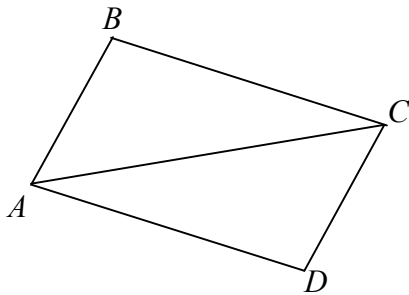


Рис.31

Разобьем четырехугольник $ABCD$ на два треугольника. Тогда сумма углов четырехугольника S будет равна $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$. Но сумма углов каждого треугольника меньше $2d$, тогда сумма углов четырехугольника меньше $4d$.

Теорема 3. Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского непостоянна.

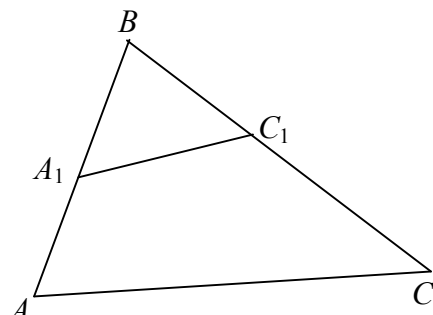


Рис.32

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что сумма углов треугольника постоянна: $S_{ABC} = S_{A_1BC_1}$. Тогда $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B + \angle C_1$, отсюда

$$\angle A + \angle C = \angle A_1 + \angle C_1. \quad (8.1)$$

Рассмотрим четырехугольник AA_1C_1C и найдем сумму его углов:

$$S_{AA_1C_1C} = \angle A + 180^\circ - \angle A_1 + 180^\circ - \angle C_1 + \angle C = 360^\circ$$

в силу формулы (8.1). А это не возможно по теореме 2. Значит, сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского – непостоянна, оставаясь меньше $2d$, она меняется от треугольника к треугольнику.

Теорема 4. Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

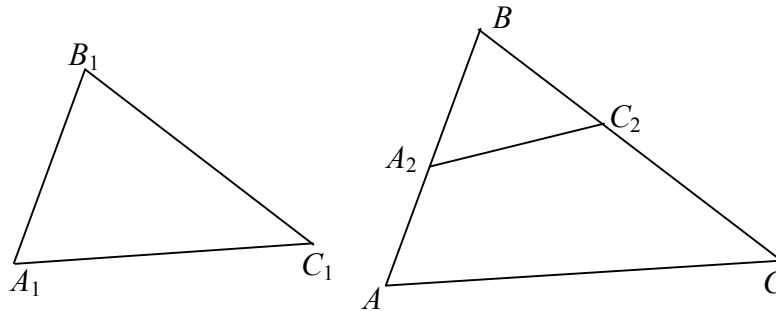


Рис.33

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$,

$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство.

Применяем метод от противного. Предположим, что $\triangle ABC \neq \triangle A_1B_1C_1$, пусть, например, $AB \neq A_1B_1$, для определенности пусть $AB > A_1B_1$, отложим от точки B на стороне BA отрезок $BA_2 = B_1A_1$ и от точки A_2 в полуплоскости с границей (BA) и содержащей точку C , отложим $\angle BA_2C_2 = \angle B_1A_1C_1$. Возможны три случая положения точки C_2 на луче BC .

1) Точка C_2 лежит между точками B и C (коротко: $C_2 * BC$). Рассмотрим сумму углов четырехугольника AA_2C_2C :

$$S_{AA_2C_2C} = \angle A + 180^\circ - \angle A + 180^\circ - \angle C + \angle C = 360^\circ,$$

чего быть не может.

2) $C * BC_2$.

Применим к $\triangle ABC$ и прямой A_2C_2 аксиому Паша, получим, что $X * AC$. Рассмотрим $\triangle AA_2X$. Угол $\angle BA_2X = \angle A$, т.е. внешний угол

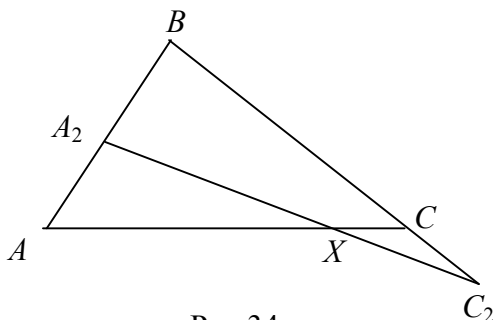


Рис.34

равен внутреннему с ним не смежному, чего быть не может на плоскости абсолютной геометрии. Значит, второй случай невозможен.

3) Пусть $C_2 = C$.

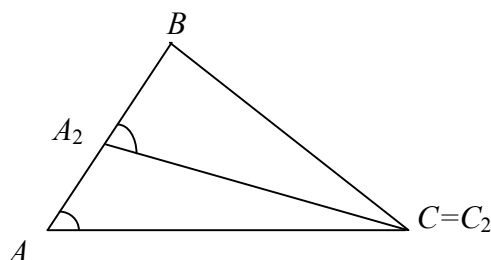


Рис.35

Вновь внешний угол BA_2C треугольника AA_2C равен внутреннему углу A_2AC , с ним не смежному, что невозможно.

Итак, среди трех точек B , C_2 , C ни одна не лежит между двумя другими, что противоречит аксиоме

Π_2 системы аксиом Гильберта: среди трех точек прямой существует единственная точка, лежащая между двумя другими.

Таким образом, наше предположение о том, что $\triangle ABC \neq \triangle A_1B_1C_1$ – неверно, т.е. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ и теорема доказана.

Следствие. На плоскости Лобачевского не существует подобных треугольников.

Доказанная теорема 4 – это четвертый признак равенства треугольников на плоскости Лобачевского.

Теорема 5. Через точку A , не принадлежащую прямой a можно провести на плоскости Лобачевского бесчисленное множество прямых, не пересекающих прямую a .

Доказательство.

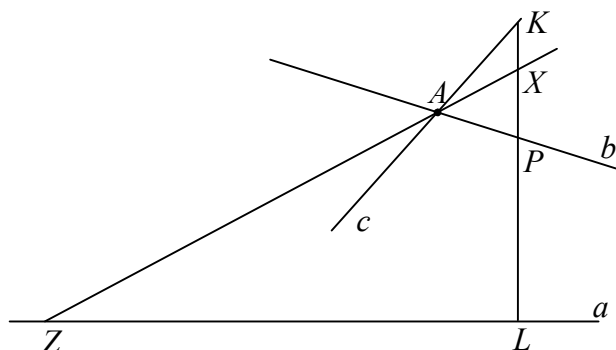


Рис.36

По аксиоме параллельности Лобачевского через точку A можно провести по крайней мере две прямых b и c не пересекающих a . Рассмотрим прямую b . Она разбивает плоскость на две полуплоскости, в одной из них лежит прямая a .

Прямая $c \cap b = A$, т.е. c полностью не лежит в одной полуплоскости

с границей b . Один луч прямой c лежит в той полуплоскости, где лежит a , а второй луч – в другой полуплоскости. На втором луче возьмем точку K , а на прямой a – точку L . Эти точки лежат в разных полуплоскостях относительно прямой b , значит, отрезок KL пересекает b в точке P . На отрезке PK возьмем какую – либо точку X и докажем, что любая прямая, проходящая через точки A и X , не пересекает прямую a . Тогда теорема будет доказана.

Предположим противное. Пусть прямая AX пересекает прямую a в точке Z . Рассмотрим $\triangle LXZ$ и прямую c и применим аксиому Паша. Прямая c пересекает сторону ZX треугольника LXZ , тогда она должна пересекать сторону LZ или XL . Прямая c пересекает (XL) в точке K , K не принадлежит стороне XL , тогда c пересекает отрезок LZ , т.е. прямая c пересекает прямую a , что противоречит условию. Значит, AX не пересекает прямую a , так как X любая точка отрезка PK , то доказано, что через точку A проходит бесчисленное множество прямых, не пересекающих прямую a .

Среди всех прямых, не пересекающих a , есть две прямые, которые выполняют особую роль, которые и называются параллельными прямой a (в одном направлении и в другом).

Вопросы и упражнения

1. Приведите определение плоскости Лобачевского.
2. Если A , B и R – три точки одной прямой, а C – точка вне прямой, то середины D , E и S отрезков $[CA]$, $[CB]$, $[CR]$ не лежат на одной прямой. Докажите.
3. Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины сторон треугольника (средней линии), меньше половины третьей стороны (основания).
4. Докажите, что угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, – острый.
5. Докажите, что в прямоугольном треугольнике величина хотя бы одного из его острых углов меньше $\frac{\pi}{4}$.

6. Докажите, что катет, лежащий против угла $\frac{\pi}{6}$, больше половины гипотенузы.
7. Докажите, что если серединные перпендикуляры двух сторон треугольника пересекаются, то серединный перпендикуляр к третьей стороне проходит через точку их пересечения.
8. Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы углов треугольника, пересекаются в одной точке.
9. Докажите, что сторона правильного шестиугольника больше радиуса окружности, описанной около шестиугольника.
10. Докажите, что все треугольники, имеющие общее основание и одну и ту же сумму внутренних углов, равновелики, т.е. имеют одинаковую площадь.

§9. Параллельные по Лобачевскому и их свойства

Рассмотрим плоскость Лобачевского L^2 как математическую структуру следующего вида:

$$L^2 = (M_1, M_2, p_1, p_3, p_4, p_5) + \sum_r^* (I_{1-3} II-IV, V^*),$$

$\sum_r^*$ – система аксиом Гильберта, в которой аксиома параллельности Евклида V заменена аксиомой Лобачевского V^* .

Введем понятие параллельных прямых на плоскости Лобачевского.

Возьмем прямую a и точку A , не лежащую на прямой a .

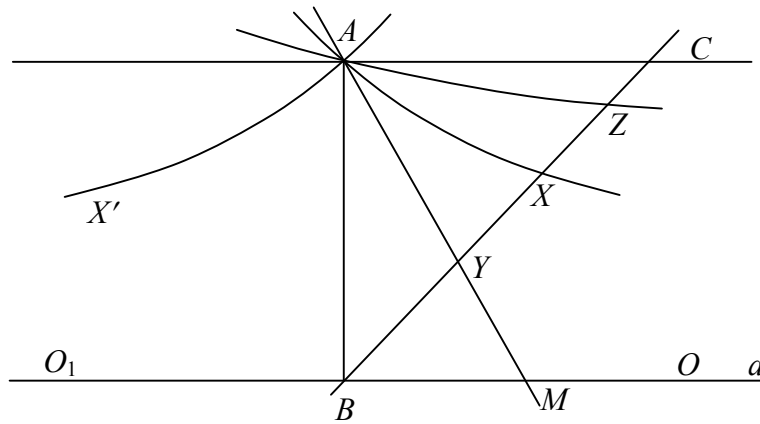


Рис.37

Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую a и проведем прямую $AC \perp AB$. Прямые AC и a не пересекаются, как два перпендикуляра к одной прямой. Таким образом, все прямые, проходящие через точку A можно разбить на два непустых множества: на множество прямых пересекающих прямую a и множество прямых, не пересекающих ее (рис. 37).

Это разбиение прямых пучка с центром в точке A индуцирует разбиение точек направленной прямой BC на два класса.

Точку B отнесем к первому классу, точку C – ко второму классу.

Точки предшествующие точке B , отнесем к первому классу, а точки, которым предшествуют точка C – ко второму классу. Осталось распределить по классам внутренние точки отрезка BC . Возьмем $Y \in [BC]$, если (AY) пересекает прямую a , то Y отнесем к первому классу, если (AZ) не пересекает a , то Z относим ко второму классу. Это разбиение точек

прямой BC на два класса удовлетворяет условиям *теоремы Дедекинда*, справедливой в абсолютной геометрии (см. §7). Следовательно, на прямой BC существует единственная точка X , производящая деление точек на два класса. Точка X является либо последней точкой первого класса, либо первой точкой второго класса.

Нетрудно убедиться, что последней точкой первого класса точка X быть не может. Если предположить, что X является последней точкой первого класса, тогда $AX \cap a = K$. Возьмем на прямой a точку K' , следующую за K и проведем AK' . $AK' \cap BC = D$, точка D по условию разбиения принадлежит первому классу и X предшествует D , то есть точка X не является последней в первом классе, что противоречит принципу Дедекинда. Значит, X принадлежит второму классу и является в нём первой, тогда прямая AX не пересекает прямую a и является граничной прямой, отделяющей прямые, проходящие через точку A и пересекающие a , от прямых, проходящих через точку A и не пересекающих a .

Граничная (заградительная) прямая AX , отделяющая прямые, проходящие через точку A и пересекающие прямую a от прямых, проходящих через точку A и не пересекающих прямую a называется параллельной прямой a в точке A в направлении BO .

Аналогичные рассуждения проведем в другой полуплоскости с границей AB и построим прямую AX' , симметричную прямой AX относительно AB . Прямая AX' также называется параллельной прямой a в точке A , но в направлении BO_1 , противоположном BO .

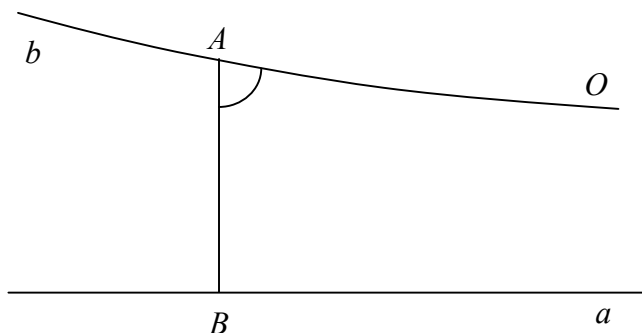


Рис.38

Таким образом, через точку A проходит точно две прямых, параллельных прямой a , одна прямая параллельна a в направлении BO , вторая – в направлении BO_1 .

Какие условия должны выполняться для того, чтобы прямая b была параллельна

прямой a в точке A в направлении AO ?

Ответ на этот вопрос следующий:

1. Во первых, как мы видели выше, прямые b и a не пересекаются, т.е. выполняется *критерий непересечения*.

2. Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую a . $\angle BAO$ называется *углом параллельности*. Любой луч, проходящий через точку A и лежащий внутри угла BAO должен пересекать прямую a . Это – критерий угла.

Итак, для того, чтобы прямая b была параллельна прямой a в точке A в направлении AO необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два критерия:

- 1) критерий непересечения;
- 2) критерий угла в точке A .

Заметим, что при проверке критерия угла необязательно луч AB должен быть перпендикулярным a , B – любая точка на прямой a .

Свойства параллельных прямых на плоскости Лобачевского.

Теорема 1. Если прямая AX параллельна прямой a в точке A в направлении AX , то прямая AX параллельна прямой a и в любой другой своей точке в том же направлении.

Доказательство.

Рассмотрим сначала случай, когда точка C расположена в сторону параллельности от точки A (рис. 39).

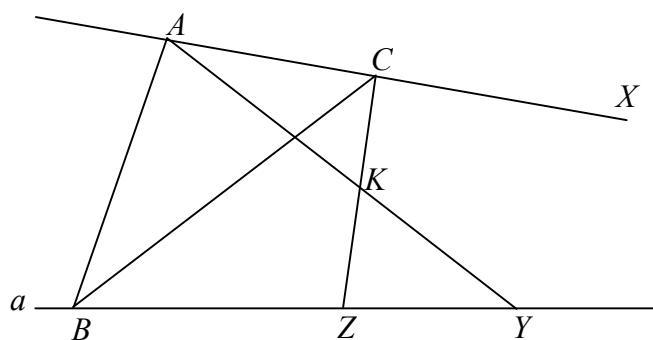


Рис.39

Докажем, что AX параллельна a в точке C в направлении AX . Для этого надо проверить выполнимость двух критериев:

- 1) критерия непересечения;
- 2) критерия угла в точке C .

Критерий непересечения выполняется, так как по условию AX параллельна a в точке A . Проверим критерий угла для точки C . Для этого мы докажем, что всякий луч CK (рис. 39), принадлежащий внутренности угла BCX , обращенного в сторону параллельности в точке C ,

пересечет прямую a .

Действительно, прямая AK пересечет прямую a в некоторой точке Y , так как для точки A выполняется критерий угла.

Далее к $\triangle ABY$ и прямой CK применяем аксиому Паша и отсюда получаем, что прямая CK пересекает a в некоторой точке Z .

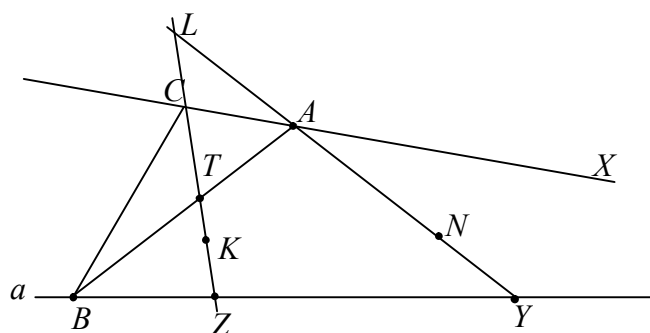


Рис. 40

Пусть теперь точка C расположена по другую сторону от точки A (рис. 40).

Для доказательства критерия угла в точке C возьмем $\angle BCX$, обращенный в сторону предполагаемой параллельности в точке C и луч CK внутри этого угла.

Надо доказать, что CK пересекает прямую a .

Возьмем на продолжении луча CK точку L и проведем прямую LA .

Луч AN принадлежит углу BAX , обращенному в сторону параллельности AX к прямой a в точке A и пересекает a в точке Y . Прямая LK , очевидно, пересекает отрезок AB в точке T , так как луч CK принадлежит внутренности угла BCX , а концы отрезка AB лежат на сторонах этого угла. Применяя аксиому Паша к треугольнику BAU и прямой CK , мы получим, что луч CK пересечет сторону BY этого треугольника в некоторой точке Z , а, значит, и прямую a . Теорема доказана. В дальнейшем мы будем говорить, что *прямая b параллельна прямой a в данном направлении* (не указывая в какой точке).

Справедливы также следующие свойства параллельных прямых, которые мы приводим без доказательства (см. доказательство в [6], §4).

Теорема 2. Если прямая a параллельна прямой b в заданном направлении, то прямая b также параллельна a в том же направлении.

Теорема 3. Две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении, параллельны между собой в том же направлении.

Теорема 4. Для любого острого угла всегда можно найти прямую, перпендикулярную к одной стороне и параллельную в то же время к

другой его стороне.

Теорема 5. Расстояния точек одной параллельной прямой до другой бесконечно уменьшаются в направлении параллельности, и неограниченно растут в противоположном направлении. Существует прямая, перпендикулярная к одной из параллельных прямых и параллельная другой.

Угол параллельности. Функция Лобачевского.

Пусть прямая $a \parallel b$ в некотором направлении, A – любая точка на прямой a , $AB \perp b$.

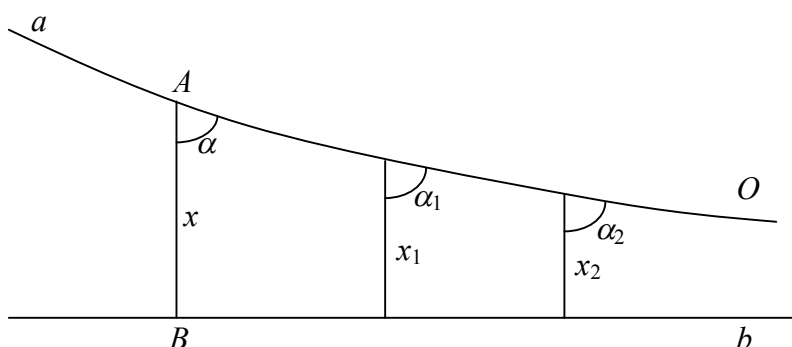


Рис.41

$\angle BAO$ называется углом параллельности в точке A . Длину отрезка AB обозначим x , x называется отрезком параллельности. $\angle BAO = \alpha$. Угол параллельности не может быть постоянным, если он постоянен, то он обязательно прямой и получается геометрия Евклида. Исследование показывает, что угол параллельности α является монотонно убывающей функцией отрезка AB (отрезка параллельности).

$$\begin{array}{l} \alpha = \Pi(x) \\ x > x_1 > x_2 > \dots \end{array} \quad \text{то } \alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

функция $\alpha = \Pi(x)$ называется функцией Лобачевского.

Если x возрастает от 0 до $+\infty$, то α убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (рис.42).

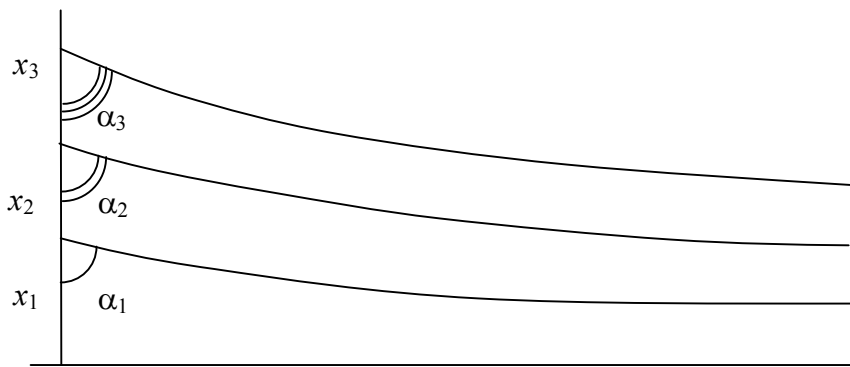


Рис.42

Лобачевский нашел выражение для функции $\Pi(x)$:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = e^{\frac{-x}{k}} \text{ или } \alpha = \operatorname{arctg}(e^{\frac{-x}{k}}) \quad (9.1)$$

где k – радиус кривизны пространства, $\frac{1}{k}$ – кривизна пространства Лобачевского.

Если k приближать к бесконечности, то в пределе $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = e^0$, то есть $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и мы получаем геометрию Евклида, т.е. *евклидова геометрия получается из геометрии Лобачевского с помощью предельного перехода.*

Из формулы (9.1) следует, что каждый острый угол можно рассматривать как угол параллельности для некоторого отрезка.

Вопросы и упражнения

1. Докажите свойства параллельных прямых:
 - а) если прямая a параллельна прямой b в заданном направлении, то прямая b также параллельна a в том же направлении;
 - б) две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении, параллельны между собой в том же направлении;
2. Докажите, что для любого острого угла всегда можно найти прямую, перпендикулярную к одной стороне и параллельную в то же время к другой его стороне.
3. Докажите, что расстояния точек одной параллельной прямой до другой бесконечно уменьшаются в направлении параллельности, и

неограниченно растут в противоположном направлении. Существует прямая, перпендикулярная к одной из параллельных прямых и параллельная другой.

4. Докажите, что соответственные углы, образованные двумя параллельными прямыми с общей секущей, не равны между собой.
5. Докажите, что сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых и их произвольной секущей, расположенных по одну сторону от этой секущей в направлении параллельности, меньше двух прямых.
6. Докажите, что для любого острого угла существует единственная прямая, параллельная его сторонам.
7. Докажите, что если серединные перпендикуляры двух сторон треугольника параллельны, то серединный перпендикуляр к третьей стороне параллелен им обоим.
8. Докажите, что если биссектрисы двух внешних углов треугольника параллельны, то им параллельна и биссектриса внутреннего угла при третьей вершине треугольника.
9. Докажите, что существует треугольник с нулевыми углами, т.е. существуют три прямые AA' , BB' , CC' , удовлетворяющие условиям: $AA' \parallel CC'$, $AA' \parallel BB'$, $BB' \parallel CC'$.
10. Пусть AA' и BB' – две различные прямые. Прямая AB называется прямой равного наклона этих прямых, если $\angle BAA' \cong \angle ABB'$, точки A' и B' лежат по одну сторону от прямой AB . Докажите предложения:
 - а) любые две прямые равного наклона на непересекающихся прямых AA' и BB' отсекают конгруэнтные отрезки;
 - б) через каждую точку одной из двух данных непересекающихся прямых AA' и BB' проходит одна и только одна прямая равного наклона.
11. Докажите предложения:
 - а) если $AA' \parallel BB'$ и AB – прямая равного наклона этих прямых, то перпендикуляр, восстановленный в середине отрезка AB , параллелен прямым AA' и BB' ;
 - б) множество середин всех отрезков равного наклона двух параллельных прямых принадлежит прямой, параллельной данным прямым.

§10. Сверхпараллельные прямые и их свойства

Как уже было отмечено ранее (§§8, 9), на плоскости Лобачевского через данную точку A можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих данную прямую a и бесчисленное множество прямых, пересекающих прямую a .

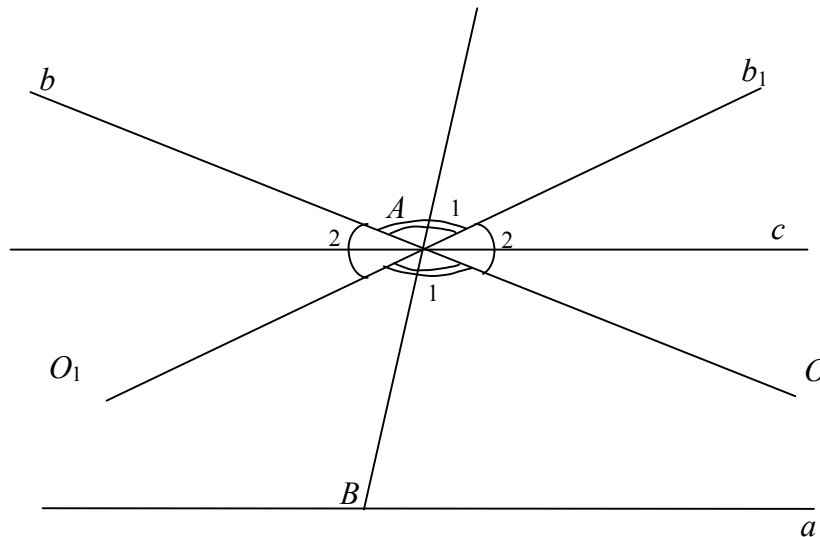


Рис.43

Среди прямых, не пересекающих a , две являются параллельными к a : это прямые b и b_1 в направлениях AO и AO_1 соответственно.

Прямые, проходящие через точку A и лежащие внутри первой пары вертикальных углов, образованных прямыми b и b_1 , пересекают прямую a , а прямые, проходящие через точку A и лежащие внутри второй пары вертикальных углов, не пересекают прямую a , но и не являются параллельными к прямой a .

Определение. Непересекающиеся, но не параллельные прямые называются *сверхпараллельными* прямыми.

Например, прямые c и a на рис.43. Они не пересекаются, но не параллельны, так как для них не выполняется критерий угла. Действительно, рассмотрим угол BAC , обращенный в сторону предполагаемой параллельности прямой c к a в точке A .

Луч AO , лежащий внутри этого угла не пересекает прямую a , так как $AO \parallel a$, значит, критерий угла для прямых c и a не выполняется, и c не

пересекает a .

Сверхпараллельные прямые называются еще расходящимися. Отметим свойства сверхпараллельных прямых.

Теорема 1. Два перпендикуляра к одной прямой – сверхпараллельны.

Доказательство теоремы следует из того, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше двух прямых, значит, эти перпендикуляры не пересекаются. Но они не могут быть и параллельными, так как угол параллельности меньше $\frac{\pi}{2}$.

Теорема 2. Две сверхпараллельные прямые имеют общий перпендикуляр и притом единственный, он является кратчайшим расстоянием между этими прямыми.

Доказательство. Обозначим сверхпараллельные прямые буквами a и b . Возьмем на прямой b произвольную точку A и проведем две прямые AX и AX' , параллельные прямой a в соответствующих направлениях.

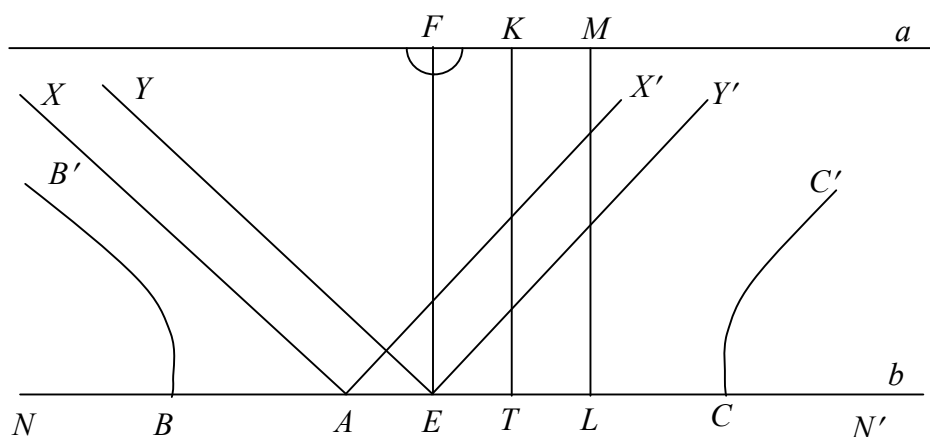


Рис.44

Рассмотрим острые углы NAX и $N'AX'$. По теореме 4 §9 найдется прямая BB' , перпендикулярная к прямой b и параллельная второй стороне AX острого угла и прямая $CC' \perp b$ и параллельная второй стороне AX' острого угла $N'AX'$.

Пусть теперь E – середина отрезка BC . Опустим из точки E перпендикуляр EF на a . Докажем, что EF перпендикулярен прямой b и является, следовательно общим перпендикуляром к прямым a и b .

С этой целью проведем прямые EY и EY' , параллельные в обоих направлениях к прямой a . Очевидно, что

$$\angle BEY = \angle CEY' \quad (10.1)$$

как углы параллельности прямых EY и BB' а также EY' и CC' для равных отрезков $BE=CE$. Аналогично

$$\angle FEY = \angle FEY' \quad (10.2)$$

как углы параллельности к одному отрезку EF .

Сложим почленно (10.1) и (10.2), получим

$$\angle FEB = \angle FEC.$$

Так как эти углы смежные, то они – прямые и EF – общий перпендикуляр сверхпараллельных прямых a и b .

Докажем, что EF – единственный.

Пусть существует еще один общий перпендикуляр ML к прямым a и b , тогда у четырехугольника $EFML$ четыре прямых угла, что невозможно на плоскости Лобачевского. EF определяет также кратчайшее расстояние между прямыми a и b .

Действительно, возьмем на прямой a точку K и опустим из нее перпендикуляр KT на прямую b . Рассмотрим четырехугольник $EFKT$ с двумя прямыми углами при нижнем основании ET и прямым углом F при верхнем основании, тогда угол K – острый. Следовательно, $EF < KT$. Теорема доказана.

Теорема 3. Если две прямые при пересечении с третьей образуют равные соответственные углы или равные накрест лежащие углы, или внутренние односторонние углы, в сумме составляющие $2d$, то эти прямые сверхпараллельны.

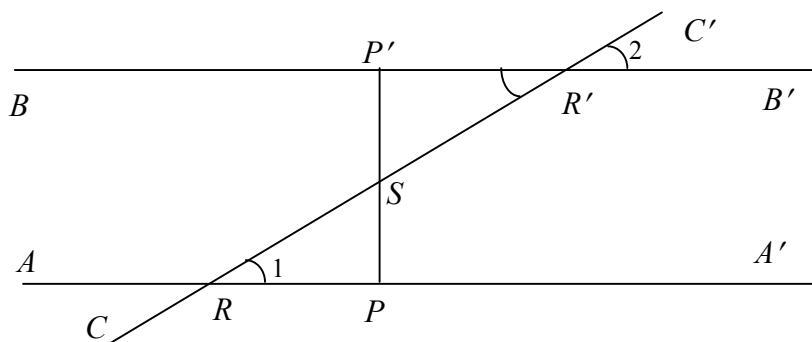


Рис. 45

Доказательство. Пусть прямые AA' и BB' пересекаются прямой CC' , при этом угол 1 равен углу 2. Через середину S отрезка RR' проведем перпендикуляры $SP \perp AA'$ и $SP' \perp BB'$. Тогда $\triangle SPR = \triangle SP'R'$ по гипотенузе и острому углу, отсюда $\angle PSR = \angle P'SR'$, т.е. эти углы – вертикальные и PSP' есть прямая, перпендикулярная к AA' и к BB' . Значит, прямые AA' и BB' являются сверхпараллельными (см. теорему 1).

Отсюда легко получить доказательство теоремы и в остальных двух случаях.

На основании этой теоремы мы приходим к следующему важному следствию.

Следствие. Сумма внутренних односторонних углов при двух параллельных, пересекаемых третьей прямой, не равна $2d$, она меньше $2d$ для углов, расположенных от третьей прямой в сторону параллельности.

Соответственные углы при параллельных и накрест лежащие углы не равны.

Это следствие является прямым отрицанием пятого постулата Евклида.

Вопросы и упражнения

1. Докажите, что средняя линия треугольника расходится с основанием, причем их общий перпендикуляр проходит через середину основания.
2. Докажите, что если серединные перпендикуляры двух сторон треугольника расходятся, то серединный перпендикуляр к третьей стороне расходится с ними.
3. Докажите, что на плоскости Лобачевского прямые, содержащие высоты треугольника, либо пересекаются в одной точке, либо параллельны, либо все три расходятся.
4. Даны точка O и не проходящая через нее прямая p . Докажите, что множество концов отрезков с началом на прямой p , делящихся точкой O пополам, есть прямая, расходящаяся с прямой p .
5. Докажите, что перпендикуляр, восстановленный в середине секущей равного наклона двух расходящихся прямых, расходится с ними.

6. Найдите множество точек, равноудаленных от двух расходящихся прямых.
7. Докажите, что проекция одной из двух расходящихся прямых на другую есть открытый отрезок.
8. Докажите, что в полосе, заключенной между двумя расходящимися прямыми, существует бесконечно много прямых, расходящихся с обеими, и ровно четыре, параллельных данным прямым.
9. В четырехугольнике с двумя прямыми углами, прилежащими к одной стороне, будем называть эту сторону базисом, противоположную – антибазисом, остальные стороны боковыми. Докажите следующие признаки равенства четырехугольников указанного типа:
 - а) по базису и боковым сторонам;
 - б) по базису, боковой стороне и прилежащему к ней непрямому углу;
 - в) по боковой стороне, антибазису и углу, заключенному между ними;
 - г) по базису, антибазису и большей боковой стороне;
 - д) по базису, боковой стороне и не прилежащему к ней непрямому углу;
 - е) по боковой стороне и двум непрямым углам;
 - ж) по базису, антибазису и непрямому углу;
 - з) по антибазису и двум непрямым углам;
 - и) по боковой стороне, антибазису и непрямому углу, заключенному между ними;
 - к) по двум боковым сторонам и антибазису;
 - л) по базису и непрямым углам.
10. Имеет ли место признак равенства четырехугольников, указанных в предыдущей задаче, по боковым сторонам и непрямому углу?

§11. Пучки прямых и кривые плоскости Лобачевского

Прежде чем перейти к изучению простейших кривых на плоскости Лобачевского, определим понятие пучков прямых линий. Совокупность всех прямых плоскости Лобачевского, пересекающихся в общей точке O , называется *пучком прямых первого рода*. Точка O называется *центром пучка* (рис. 46).

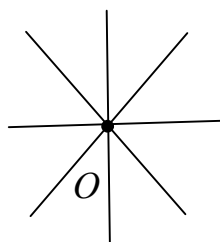


Рис.46

Совокупность прямых плоскости Лобачевского, параллельных между собой в одном направлении, называется *пучком прямых второго рода*. Говорят также, что этот пучок имеет бесконечно удаленный центр (рис. 47).

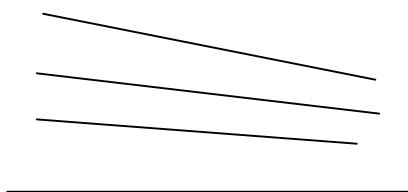


Рис.47

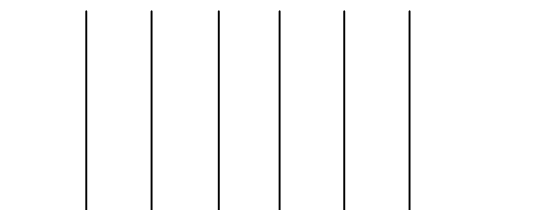


Рис.48

Совокупность прямых плоскости Лобачевского, перпендикулярных одной прямой a , называется *пучком третьего рода*. Прямая a называется *осью пучка*. Говорят также, что пучок прямых третьего рода имеет идеальный центр (рис. 48).

Очевидно, две прямые плоскости однозначно определяют пучок, к которому они принадлежат. Через каждую точку плоскости проходит одна прямая, принадлежащая пучку. Мы считаем, что заданная точка не является центром в случае пучка прямых первого рода. Докажем следующую важную теорему.

Теорема 1. Перпендикуляры, восстановленные из середин сторон треугольника, принадлежат к одному пучку первого, второго или третьего рода.

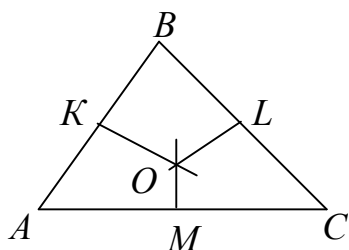


Рис.49

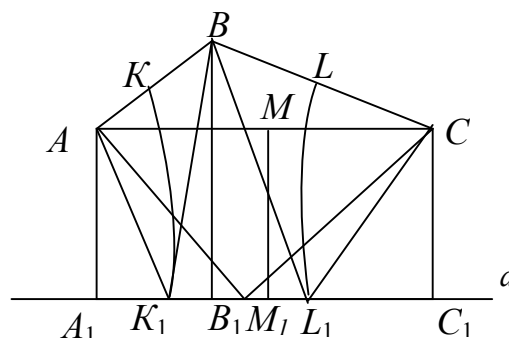


Рис.50

Пусть два перпендикуляра, восстановленные из середин K, L сторон AB и BC треугольника ABC , пересекаются в точке O . Докажем, что третий перпендикуляр также пройдет через эту точку O (рис. 49).

Из треугольника ABO следует, что $AO = OB$; аналогично из треугольника BOC следует $BO = OC$. Следовательно, $AO = OC$ и треугольник AOC является равнобедренным. В таком случае медиана OM является высотой. Перпендикуляр, восстановленный из середины стороны AC , проходит через точку O . Все три перпендикуляра принадлежат пучку прямых первого рода.

Пусть теперь перпендикуляры KK_1 и LL_1 восстановленные из середин K и L указанных сторон, перпендикулярны некоторой прямой a (рис. 50).

Опустим на прямую a перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 из вершин данного треугольника. Из равенства прямоугольных треугольников AKK_1 и KBK_1 (по двум катетам) следует, что $AK_1 = BK_1$. Далее из равных прямоугольных треугольников AA_1K_1 и BB_1K_1 выводим, что $AA_1 = BB_1$. Аналогично из равенства прямоугольных треугольников BLL_1 и CLL_1 а также прямоугольных треугольников BB_1L_1 и CC_1L_1 мы выводим, что $BB_1 = CC_1$. Следовательно, вершины треугольника ABC равноудалены от прямой a :

$$AA_1 = BB_1 = CC_1$$

Следовательно, четырехугольник AA_1C_1C является четырехугольником Хайяма-Саккери. Выше мы установили, что прямая, соединяющая середины M и M_1 верхнего и нижнего оснований этого четырехугольника, является общим перпендикуляром к этим основаниям. Итак, все три перпендикуляра принадлежат пучку прямых третьего рода.

Предположим теперь, что два перпендикуляра параллельны. Все три перпендикуляра, нетрудно показать, пересекают большую сторону треугольника, например, в точках K_1, M, L_1 (рис. 51).

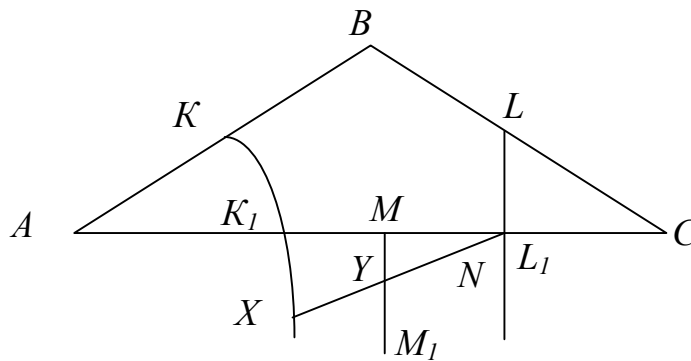


Рис.51

Из этих трех точек K_1, M, L_1 прямой AC одна из них обладает свойством лежать между оставшимися, пусть $M^* K_1 L_1$. Любые два рассматриваемые перпендикуляра параллельны, в противном случае имели бы место первый или третий случаи. Докажем, что перпендикуляр MM_1 , восстановленный из середины M стороны AC , параллелен прямым LL_1 и KK_1 в том же направлении. Критерий непересечения выполняется. Возьмем произвольный луч L_1N , принадлежащий внутренности угла $K_1L_1M_1$ обращенного в сторону исследуемой параллельности. Он пересечет параллельную прямую KK_1 в точке X . Далее, применяя к треугольнику K_1L_1X и прямой MM_1 аксиому Паша, получим, что MM_1 пересекается с L_1X_1 в некоторой точке Y . Теорема доказана.

Перейдем теперь к определению простейших кривых линий на плоскости Лобачевского. Предварительно введем понятие соответствующих точек прямых пучка. Пусть на плоскости Лобачевского задан пучок прямых первого, второго или третьего рода. Возьмем две прямые, принадлежащие какому-нибудь пучку (рис. 52).

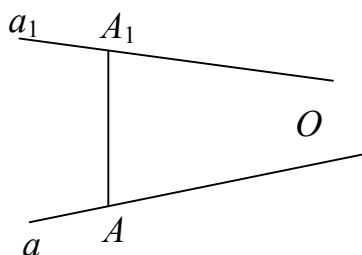


Рис.52

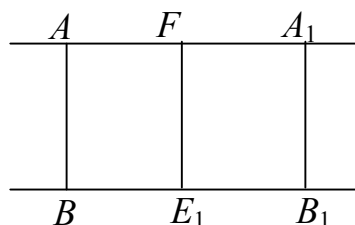


Рис.53

Точки A и A_1 на прямых a и a_1 данного пучка называются *соответствующими*, если

$$\angle OAA_1 = \angle OA_1A$$

Заметим, что O обозначает центр для пучка прямых первого и второго рода и ось для пучка прямых третьего рода. Соответствующие точки A , A_1 на прямых пучка первого рода характеризуются тем, что они равноудалены от центра пучка:

$$OA = OA_1$$

Для прямых пучка третьего рода эти точки характеризуются тем, что они равноудалены от оси пучка (рис. 53).

Действительно, если A и A_1 соответствующие точки на прямых пучка третьего рода, то $BA A_1 B_1$ является четырехугольником Хайяма-Саккери и, следовательно,

$$AB = A_1 B_1.$$

В рассмотренных случаях можно сказать также, что соответственные точки A и A_1 являются симметрическими относительно биссектрисы полосы. Под биссектрисой полосы для двух прямых пучка первого рода мы понимаем обычную биссектрису угла AOA_1 . В случае прямых пучка третьего рода биссектрисой полосы двух прямых AB и

A_1B_1 по определению является общим перпендикуляр верхнего и нижнего оснований четырехугольника $BA A_1B_1$ Хайяма-Саккери. Для пучка прямых второго рода биссектрисой полосы двух прямых a и a_1 является прямая, относительно которой они симметричны. Эта прямая принадлежит рассматриваемому пучку прямых. Действительно, возьмем на указанных прямых пучка второго рода соответственно точки M, N (рис. 54).

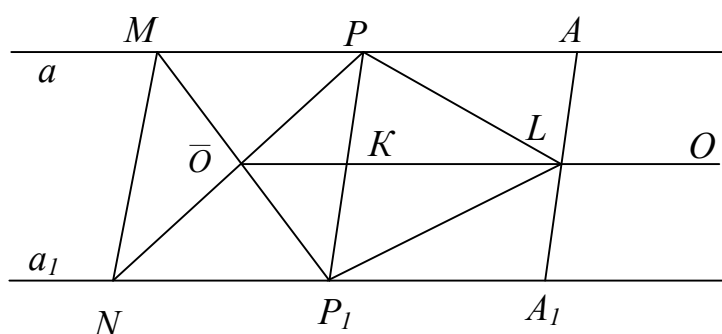


Рис.54

Построим далее биссектрисы углов OMN и ONM , обращенных в сторону параллельности. Эти биссектрисы пересекаются в некоторой точке $\bar{O}$. Опустим из этой точки $\bar{O}$ перпендикуляры $\bar{O}P$ и $\bar{O}P_1$ на прямые a и a_1 , пучка. Пусть далее $\bar{O}O$ является биссектрисой угла $P\bar{O}P_1$. Докажем, что $\bar{O}O$ является биссектрисой полосы прямых a и a_1 . Заметим, что треугольник $P_1\bar{O}P$ является равнобедренным и точки P, P_1 являются симметричными относительно прямой $\bar{O}O$. Нетрудно доказать также, что любая точка A прямой a при симметрии относительно $\bar{O}O$ переходит в точку прямой a_1 и обратно. Этот факт следует из равенства пар треугольников KPL и KP_1L , а также PAL и P_1A_1L .

Итак, соответствующие точки двух прямых, принадлежащих пучку прямых данного рода, характеризуются тем, что они являются симметрическими относительно биссектрисы полосы, образованной проходящими через них прямыми пучка. Из этого факта и доказанной выше теоремы о принадлежности перпендикуляров, восстановленных из

середин сторон треугольника, одному пучку непосредственно выводится следующее предложение.

Теорема 2. Две точки на прямых какого-нибудь пучка, соответствующие третьей, являются соответственными между собою.

Совокупность точек на прямых пучка первого, второго или третьего рода, соответствующих данной точке, называется *простейшей кривой линии*. Из предыдущей теоремы следует, что все точки простейшей линии равноправны. Простейшие кривые линии для прямых пучков первого, второго и третьего рода называются соответственно *окружностями*, *предельными линиями* или *орициклами* и *эквидистантами* или *линиями равных расстояний*. Предельные линии и эквидистанты не являются замкнутыми линиями.

Теорема 3. Никакие три точки простейшей кривой линии не лежат на одной прямой.

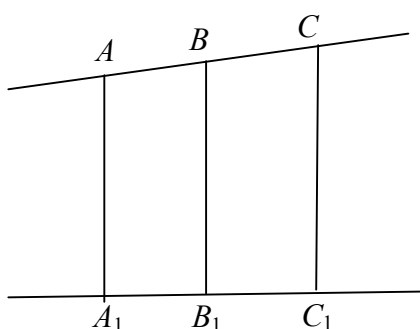


Рис. 55

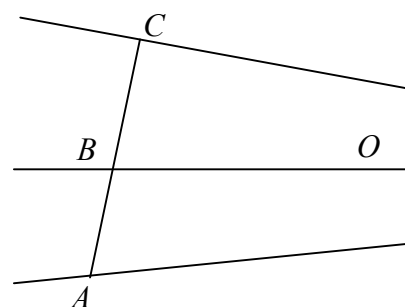


Рис. 56

Пусть три точки A, B, C линии равных расстояний принадлежат одной прямой, причем BAC^* .

Из четырехугольников Хайяма-Саккери A_1ABB_1 , A_1ACC_1 и B_1BCC_1 (рис. 55) следует, что $\angle ABB_1 = \angle B_1BC$, эти углы — смежные, значит прямые.

Это означает, что на плоскости осуществляется гипотеза прямого угла, что невозможно.

Пусть три точки A, B, C предельной линии лежат на прямой (рис. 56). Отсюда следует

$$\angle ABO = \angle BAO = \angle ACO = \angle CBO$$

и все эти углы являются прямыми, что невозможно: Аналогично рассматривается и случай точек окружности, лежащих на одной прямой. Большую роль в дальнейшем играют предельные линии. Докажем сначала следующую теорему.

Теорема 4. Всякая прямая, проходящая через точку предельной линии и составляющая с осью острый угол, пересекает эту линию еще в одной точке.

В самом деле, пусть прямая AM проходит через точку A предельной линии и составляет с осью AO острый угол α (рис. 57).

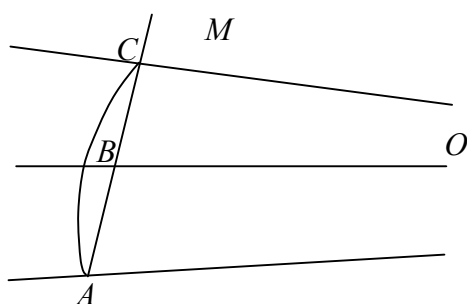


Рис.57

Среди перпендикуляров, восстановленных из точек стороны AM , найдется перпендикуляр BO , параллельный прямой AO в указанном направлении. Таким образом,

$$\alpha = \Pi (AB).$$

Построим теперь на луче BM отрезок $BC = AB$. Очевидно, точка C является искомой второй точкой пересечения с предельной линией. Действительно,

$$\angle BAO = \angle BCO$$

как углы параллельности равных отрезков AB и BC .

Установим теперь конгруэнтность предельных линий, предварительно уточнив понятие конгруэнтности. Две линии называются *конгруэнтными*, если существует взаимнооднозначное отображение точек одной линии на точки другой, при котором соответствующие хорды равны. Следовательно, любые две точки M, N первой кривой переходят при установленном отображении в M', N' так, что отрезки MN и $M'N'$ равны:

$$MN = M'N'.$$

Теорема 5. Любые две предельные линии конгруэнтны друг другу.

Пусть даны две предельные линии γ и γ_1 (рис. 58, 59). Для доказательства конгруэнтности этих линий надо установить взаимно однозначное отображение точек одной линии на точки другой так,

чтобы соответствующие хорды были равны. Хорды MN и M_1N_1 понимаются соответствующими, если отображение, устанавливающее конгруэнтность линий, переводит точки M, N первой предельной линии соответственно в M_1N_1 второй предельной линии.

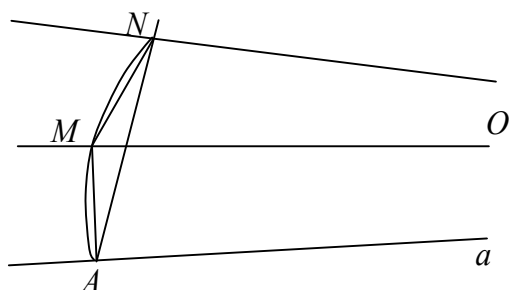


Рис.58

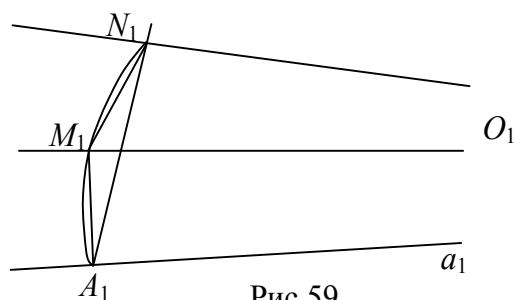


Рис.59

Возьмем на предельных линиях γ, γ_1 произвольные точки A, A_1 соответственно. Будем считать, что отображение f точке A линии κ относит точку A_1 на линии κ_1 . Проведем через эти точки A, A_1 оси a и a_1 . Возьмем далее любую точку M на первой предельной линии. Угол MAO острый, так как является углом параллельности Π ($AM/2$) для отрезка $AM/2$. Отложим этот острый угол при A_1 и стороне A_1O_1 . По предыдущей теореме вторая сторона угла, составляющая острый угол с осью a_1 пересекает предельную линию еще в одной точке. Эту точку M_1 мы будем считать соответствующей для точки M по определению отображения f . Докажем теперь, что построенное отображение является искомым. Возьмем для этого любую пару точек M, N на первой предельной линии. Они при отображении f переходят в точки M_1 и N_1 , второй линии. Легко установить, что треугольники AMN и $A_1M_1N_1$ конгруэнтны, так как $AM=A_1M_1$, $AN=A_1N_1$ и $\angle MAN = \angle M_1A_1N_1$. Отсюда следует, что $MN=M_1N_1$. Теорема доказана.

Для трех точек A, B, C предельной линии можно ввести понятие “лежать между”. Точка B называется “лежащей между точками” A и C , если оси a и c лежат в разных полуплоскостях, определенных осью b . Нетрудно показать также, что если B лежит между A, C , то $\angle BCO > \angle ACO$ и обратно (рис. 60).

Таким образом, понятие “между” для точек предельной линии можно описать при помощи углов. Оно позволяет обычным образом ввести понятие дуги предельной линии. Совокупность точек A и B

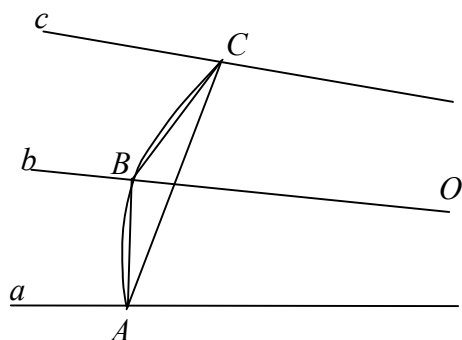


Рис. 60

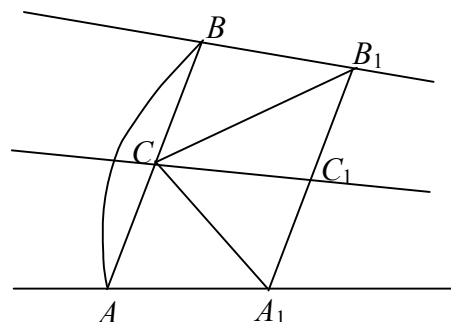


Рис. 61

предельной линии и всех точек, обладающих свойством быть “между” ними, называется *дугой* предельной линии. Дуга AB больше дуги AM , если M^*AB . Нетрудно также установить, что равным хордам соответствуют равные дуги, большей хорде соответствует большая дуга.

На предельных линиях справедлива аксиома Архимеда и принцип Дедекинда. На них можно ввести измерение дуг.

Простейшие кривые линии, построенные на прямых одного пучка, называются концентрическими. Докажем еще одну теорему о концентрических предельных линиях.

Теорема 6. Концентрические предельные линии отсекают на осях пучка равные отрезки.

Возьмем пучок прямых второго рода. Пусть на прямых этого пучка даны концентрические предельные линии AB и A_1B_1 . Докажем, что $AA_1=BB_1$. Построим для этого биссектрису полосы, составленную осями AA_1 и BB_1 (рис. 61). Она является прямой CC_1 рассматриваемого пучка, где C и C_1 являются серединами хорд AB и A_1B_1 дуг концентрических предельных линий. Из равенства треугольников B_1C_1C и A_1C_1C , а также треугольников BB_1C и AA_1C выводим, что $AA_1=BB_1$. Теорема доказана.

Аналогичные построения можно провести в пространстве L^3 Лобачевского и получить три типа поверхностей. В пространстве L^3 существует три типа связок прямых:

- 1) центральная связка – множество всех прямых, проходящих через одну и ту же точку $A \in L^3$;
- 2) Связка расходящихся прямых – множество всех прямых, перпендикулярных одной и той же плоскости;
- 3) Связка параллельных прямых – множество всех прямых, параллельных одна другой в одном и том же направлении.

Используя эти связки, мы с помощью секущих равного наклона получим пространственный аналог окружности, эквидистанты и орицикла, которые называются соответственно *сферой*, *эквидистантной поверхностью* и *орисферой* (или предельной поверхностью).

Орисферу можно получить вращением орицикла вокруг его оси. Следовательно, все орисферы конгруэнтны.

Через каждые две точки орисферы проходит орицикл, и только один. Можно доказать, что если на орисфере рассмотреть множество всех точек и множество всех «прямых» – орициклов, то для них выполняются все аксиомы евклидовой плоскости. Значит, на орисфере пространства Лобачевского реализуется планиметрия Евклида.

Вопросы и упражнения

1. Доказать, что диаметр окружности, перпендикулярный к хорде, проходит через середину хорды; обратно: прямая, проходящая через середину хорды и перпендикулярная к ней, проходит через центр окружности.
2. Доказать, что треугольник ABC , вписанный в окружность с диаметром AB , является остроугольным, причем $\angle A < \angle C$ и $\angle B < \angle C$.
3. Доказать, что угол, вписанный в окружность, меньше половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.
4. Доказать, что вписанный в окружность угол C , опирающийся на диаметр AB , равен сумме двух других углов треугольника ABC .

5. Расстояние от центра окружности до прямой l больше радиуса окружности. Доказать, что все точки прямой l являются внешними относительно окружности.
6. Доказать, что во всяком четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма двух противоположных углов равна сумме двух других углов.
7. Через точку, лежащую вне окружности, провести к ней касательную.
8. Доказать, что две эквидистанты с общей базой и разными высотами не имеют ни одной общей точки, а две эквидистанты, базы которых пересекаются, а высоты равны, имеют одну и только одну общую точку.
9. Доказать, что одна из параллельных прямых пересекает все эквидистанты другой прямой, лежащие по одну с ней сторону от этой другой прямой.
10. Две предельные линии проходят через точку A , в которой касательные к этим линиям не совпадают. Доказать, что данные предельные линии имеют еще одну общую точку.
11. Доказать, что дуги орициклов, стягиваемых равными хордами, равны.
12. Доказать, что множество середин хорд, стягивающих все равные дуги орицикла, есть орицикл.
13. Доказать, что через любые три точки проходит либо единственная прямая, либо единственная окружность, либо единственная эквидистанта, либо единственный орицикл.
14. Через данную точку, не принадлежащую орициклу, провести касательную к орициклу.
15. Построить орицикл, проходящий через данную точку и касающийся данной прямой.

§12. Модель Бельтрами-Клейна плоскости Лобачевского

После создания неевклидовой геометрии она долгое время не признавалась учеными. И первой, сразу возникшей проблемой, стало доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Первые исследования по вопросу непротиворечивости геометрии Лобачевского были проведены итальянским математиком Бельтрами (1835-1900). В 1868г. он построил поверхность в евклидовом пространстве – *псевдосферу* которая получается вращением *трактрисы* вокруг оси OZ .

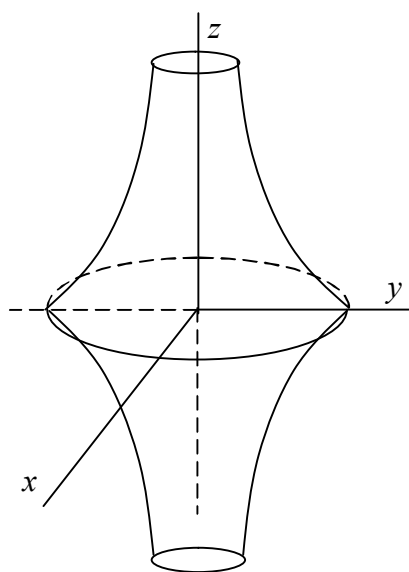


Рис.62

Псевдосфера – это поверхность постоянной отрицательной кривизны. Линейный элемент псевдосферы в полярных координатах (u, v)

можно привести к виду $ds^2 = du^2 + sh^2 u dv^2$,

тогда её полная кривизна $K = -1$. Бельтрами

доказал, что на псевдосфере реализуется часть плоскости Лобачевского, так как псевдосфера – не гладкая поверхность, на

ней есть ребро. В 1901 году Гильберт доказал, что в трёхмерном евклидовом

пространстве не существует полной и регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой представляет

собой геометрию полной плоскости Лобачевского.

Простую модель всей плоскости Лобачевского построил в 1871г. Ф.Клейн, взяв в качестве плоскости Лобачевского открытый круг евклидовой плоскости.

Как мы говорили ранее, плоскость Лобачевского L^2 есть математическая структура вида:

$$L^2 = (M_1, M_2, p_1, p_3, p_4, p_5) + \sum_{\Gamma}^*$$

основные образы: точки и прямые, основные отношения: p_1 – инцидентность точки прямой, p_3 – лежать между, p_4 – конгруэнтность отрезка отрезку, p_5 – конгруэнтность угла углу. $\sum_{\Gamma}^*$ – система аксиом

Гильберта, в которой аксиома параллельных V, заменена на ее отрицание – аксиому параллельности V^* Лобачевского.

Плоскость Лобачевского можно отобразить на некоторый открытый круг евклидовой плоскости E^2 .

Под точками плоскости Лобачевского будем понимать евклидовы точки, принадлежащие этому открытому кругу, под прямыми – хорды окружности без концов.

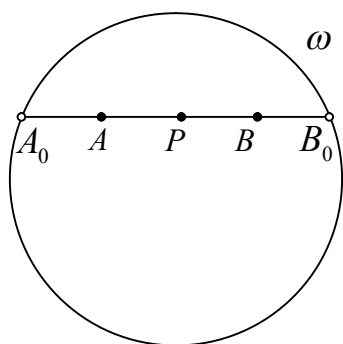


Рис. 63

Окружность называется *абсолютом*, точки окружности не принадлежат плоскости Лобачевского, их называют несобственными, а внешние точки – идеальными.

Между моделями Бельтрами и Клейна можно установить изоморфизм, поэтому модель Клейна называют моделью Бельтрами–Клейна.

Основные образы мы определили, теперь надо определить основные отношения.

Точка P принадлежит прямой A_0B_0 , если евклидова точка P принадлежит евклидовой хорде A_0B_0 .

Отношение p_3 – *лежать между* для трех точек прямой вводится аналогично: точка P плоскости Лобачевского лежит между точками A и B , если точка P лежит между евклидовыми точками A и B .

Аксиомы I – II групп системы аксиом $\sum^*_\Gamma$ выполняются, так как они являются истинными предложениями на евклидовой плоскости.

Аксиомы конгруэнтности III группы рассмотрим ниже, аксиомы непрерывности выполняются внутри круга, так как во множестве точек и хорд открытого круга евклидовой плоскости выполняется теорема Дедекинда.

Обратимся теперь к аксиоме параллельных.

Введем определение параллельных прямых в модели Бельтрами – Клейна. Прямые a и b называются параллельными, если они имеют общую точку на абсолюте.

Возьмем прямую a и точку A , не принадлежащую прямой a .

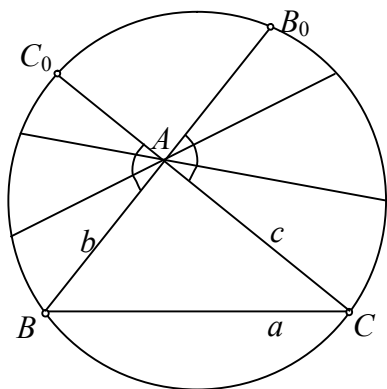


Рис.64

Нетрудно видеть, что через точку A можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих a .

Среди всех прямых, не пересекающих прямую a , две прямые – это b и c являются параллельными прямой a , одна в

направлении AB , другая в направлении AC . Прямые, проходящие через точку A и лежащие внутри вертикальных углов

BAC_0 и CAB_0 , являются сверхпараллельными к прямой a .

Таким образом, выполняется аксиома параллельности V^* Лобачевского.

Вернемся к аксиомам конгруэнтности III группы. Отношение конгруэнтности будем определять через движение.

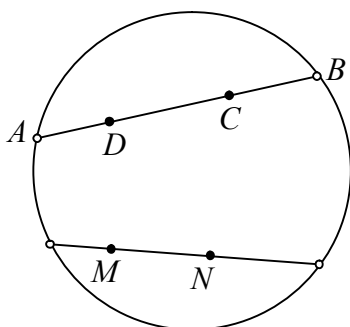


Рис.65

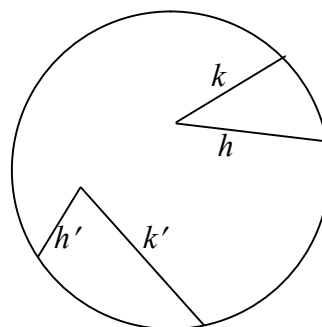


Рис.66

Будем говорить, что отрезок DC равен (конгруэнтен) отрезку MN , если существует движение плоскости Лобачевского (L -плоскости) которое отрезок DC переводит в отрезок MN .

Аналогично, угол hk равен углу $h'k'$, если существует движение L -плоскости, которое угол hk переводит в угол $h'k'$, т.е.

$$h \rightarrow h', k \rightarrow k' \text{ или } h \rightarrow k', k \rightarrow h'.$$

Движения L -плоскости в модели Бельтрами – Клейна определяются через проективные преобразования расширенной евклидовой плоскости $\bar{E}_2 = E_2 \cup \{d_\infty\}$, являющейся моделью проективной плоскости. Среди всех

проективных преобразований расширенной евклидовой плоскости выделим те, которые абсолют оставляют инвариантным, а внутренние точки переводят во внутренние, т.е. точки открытого круга переводят в точки открытого круга.

Множество всех таких преобразований образует подгруппу группы всех проективных преобразований, ее и назовем группой движений плоскости Лобачевского (L -плоскости) в модели Бельтрами – Клейна: $D = \{f, g, \varphi, \dots\}$. Очевидно, тождественное преобразование $\text{id} \in D$.

Нетрудно доказать, что такие проективные преобразования существуют. Как и на евклидовой плоскости, справедливо предложение о том, что всякое движение L -плоскости можно представить в виде композиции осевых симметрий.

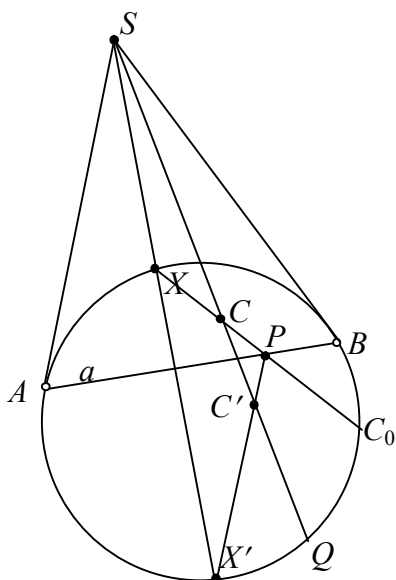


Рис.67

Роль симметрий относительно прямой a в модели Бельтрами – Клейна выполняют гомологии с осью a , а центром гомологии является полюс S прямой a относительно абсолюта, т.е. S – идеальная точка.

Гомологию h можно задать осью a , центром S (полюс прямой a) и парой соответствующих точек X и X' . Центр гомологии S можно найти как пересечение касательных SA и SB к окружности. Прямая SX – инвариантная и окружность тоже инвариантна при

гомологии, при этом внутренние точки окружности переходят во внутренние. Докажем это.

Окружность ω (абсолют) с точки зрения проективной геометрии – это овальная линия. Всякое проективное преобразование овальную линию ω переведет в овальную линию ω' . Нам надо показать, что $\omega = \omega'$, т.е. существуют проективные преобразования, которые окружность ω переводят в ту же окружность ω .

Любая кривая второго порядка может быть задана пятью точками

или тремя точками и двумя касательными ([8], §14). Зададим окружность ω точками A, B, X и касательными SA и SB . При гомологии с центром S и осью a (рис.66) точки A, B – инвариантные, касательные SA и SB – инвариантные прямые (по свойству гомологии), точка X перейдет в X' .

Если окружность ω проходит через точки A, B, X , то ее образ ω' пройдет через образы этих точек: A', B', X' , но $A=A', B=B'$ и касательные SA перейдет в SA , SB перейдет в SB . ω' определяется точками A, B, X' и двумя касательными SA и SB ($X' \in \omega$). Это значит $\omega=\omega'$, при этом дуга AXB перейдет в дугу $AX'B$.

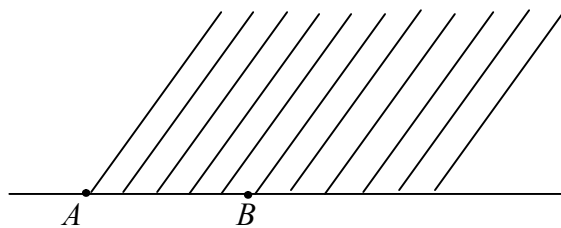
Возьмем теперь любую внутреннюю точку C окружности ω и построим ее образ C' . Проведем хорду XC , $XC \cap \omega = C_0$. SC – инвариантная прямая, значит, $C' \in SC$. Найдем $P = AB \cap XC_0$, P – инвариантная точка, тогда $C' = SQ \cap X'P$, C' принадлежит хорде $X'P$, а значит C' – внутренняя точка окружности ω .

Далее можно строить перпендикулярные прямые, равные отрезки, углы и т.д.

Но прежде всего мы докажем утверждение, аналогичное тому, что имеет место на евклидовой плоскости.

Введем понятие флага:

Луч с выделенной полуплоскостью назовем *флагом*.



Теорема. Пусть на плоскости Лобачевского заданы два флага $\alpha(AB)$ и $\alpha'(A'B')$, тогда существует единственное проективное преобразование f , которое один флаг переводит в другой, то есть
 $A \rightarrow A', AB \rightarrow A'B', \alpha \rightarrow \alpha'$

Доказательство.

Строим касательные к абсолюту: $SC, SB, S'C', S'B'$, и рассмотрим проективное преобразование f , которое проективный репер $R = \{B, C, S, D\}$

переводит в репер $R'=\{B', C', S', D'\}$. Такое преобразование существует.

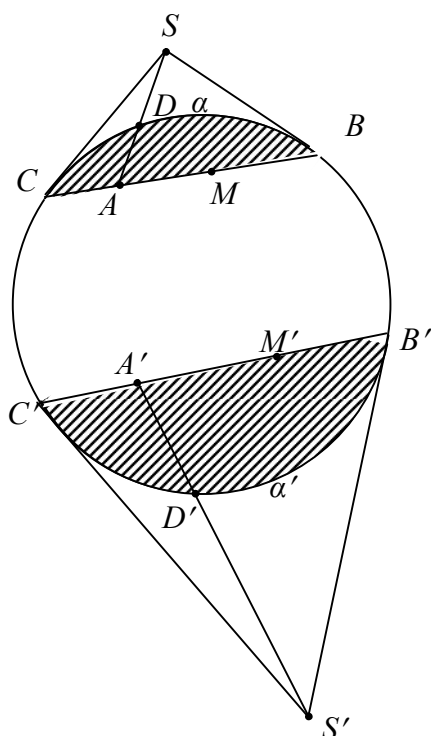


Рис.68

Преобразование f прямую SB переводит в прямую $S'B'$, SD в $S'D'$. Тогда точка A перейдет в точку A' , так как $A=CB\cap SD$, $A'=C'B'\cap S'D'$. Значит, луч AB перейдет в луч $A'B'$, дуга CDB переходит в дугу $C'D'B'$, отсюда следует, что полуплоскость α перейдет в полуплоскость α' .

Единственность преобразования f доказывается методом от противного.

Пусть существует еще одно преобразование f' , которое A переводит в A' , луч AB в луч $A'B'$ и полуплоскость α в полуплоскость α' .

Так как хорда AB переходит в хорду $A'B'$, то $f(C)=C'$. Касательные SB и SC перейдут в касательные $S'B'$ и $S'C'$ соответственно. Тогда $f(S)=S'$. Прямая SA перейдет в $A'S'$, а значит, $f(D)=D'$. Таким образом, преобразование f' точки B, C, S, D переводит в точки B', C', S', D' соответственно, т.е. репер R переводит в R' , а такое преобразование – единственное. Значит, $f=f'$.

Теперь можно перейти к проверке аксиом III группы.

1. Возьмем отрезок AM (рис.68) и луч $A'B'$. Надо доказать, что существует отрезок $A'M'=AM$, который можно отложить от точки A' , т.е. существует точка M' на луче $A'B'$, которая является образом точки M . Точку M' , например, можно построить по координатам в репере $R'=\{B', C', S', D'\}$, которые совпадают с координатами точки M в репере $R=\{B, C, S, D\}$.

2. Дан угол MAN , луч $A'B'$ с выделенной полуплоскостью α' . Требуется от луча $A'B'$ в выделенной полуплоскости α' отложить угол $M'A'N'$ конгруэнтный углу MAN . Для этого нужно построить точку N' , в которую перейдет точка N при действии на нее проективным

преобразованием f .

Аналогично проверяются другие аксиомы третьей группы.

Итак, все аксиомы системы аксиом $\sum_r^*$ плоскости Лобачевского выполняются, значит, мы построили модель плоскости Лобачевского внутри круга евклидовой плоскости, которая и называется моделью Бельтрами – Клейна.

Рассмотрим некоторые другие факты планиметрии Лобачевского в модели Бельтрами – Клейна.

1. Расстояние между двумя точками $d(A, B)$ определяется в этой модели по формуле:

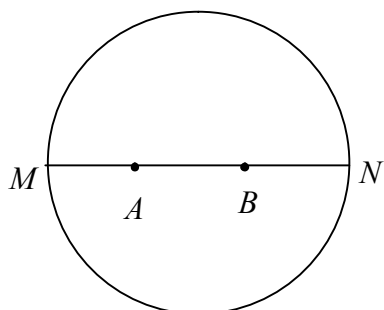


Рис.69

$$d(A, B) = \pm \frac{k}{2} \ln |(AB, MN)|, \quad (12.1)$$

(AB, MN) – сложное отношение четырех точек, k – постоянная величина.

Так как сложное отношение четырех точек прямой является инвариантом группы проективных преобразований, то и $d(A, B)$ по формуле (12.1) является инвариантом группы движений плоскости Лобачевского.

2. Пучки прямых I, II, III рода в модели Бельтрами – Клейна выглядят:

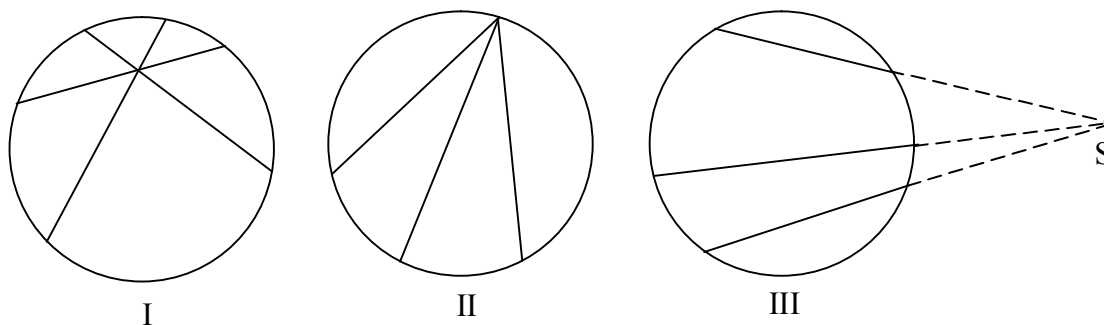


Рис.70

Пучок пересекающихся прямых (I рода) имеет центр внутри круга. Пучок параллельных прямых (II рода) – это совокупность хорд

открытого круга, имеющих общую точку на окружности, т.е. бесконечно удаленный центр. Пучок сверхпараллельных прямых (III рода) имеет идеальный центр S .

3. Рассмотрим задачи в модели Бельтрами – Клейна.

1) Для данной точки построить симметричную ей относительно данной прямой.

2) Из данной точки опустить перпендикуляр на данную прямую.

3) Построить общий перпендикуляр пучка сверхпараллельных прямых.

4) Построить угол параллельности в данной точке.

Приведем решение первой и второй задачи, задачи 3), 4) предлагаем решить самостоятельно.

Пусть в модели Бельтрами-Клейна даны некоторая прямая a , и точка A . Построим точку, симметричную точке A относительно прямой a :

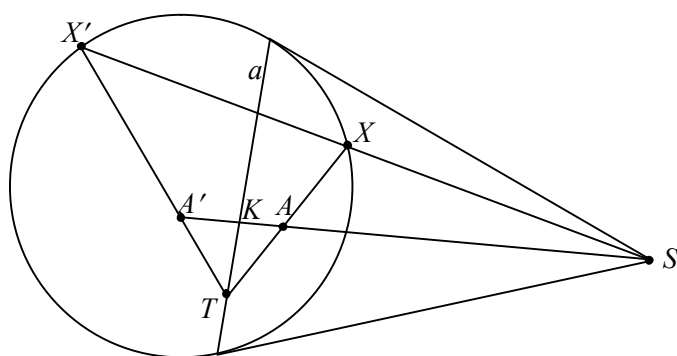


Рис.71

Как было отмечено выше, роль симметрий в модели Бельтрами-Клейна выполняют гомологии. Рассмотрим гомологию с осью a , центром S (полюс прямой a относительно абсолюта) и парой соответствующих точек X и X' . Для точки A строим ее образ

при указанной гомологии по следующей схеме:

$$1) T = XA \cap a$$

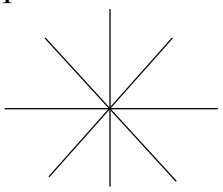
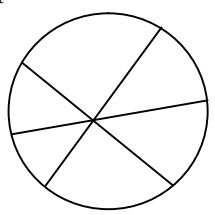
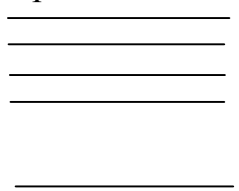
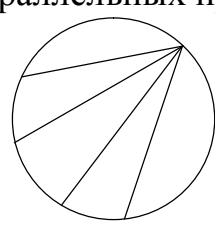
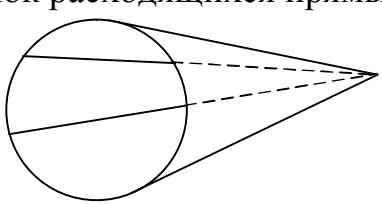
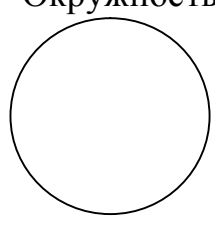
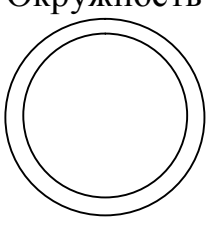
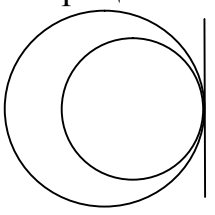
$$2) A' = SA \cap X'T$$

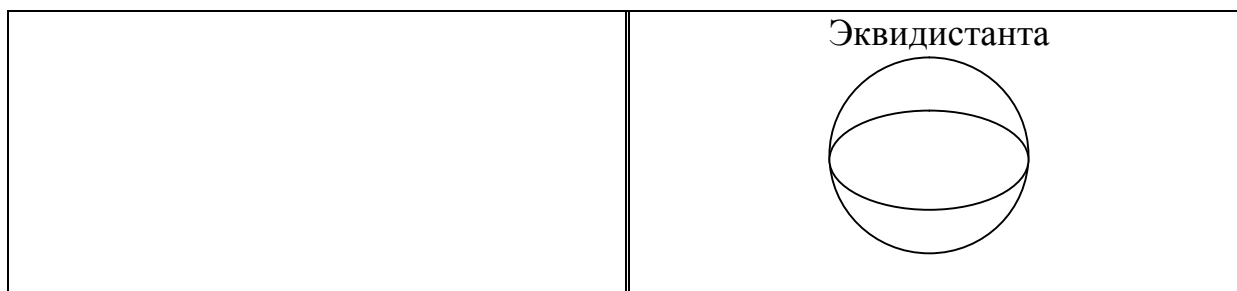
Точки A и A' соответствующие при гомологии с центром в точке S и осью a , следовательно, симметричные относительно прямой a в модели Бельтрами-Клейна.

Так как при движении L -плоскости в модели Бельтрами-Клейна точка A переходит в точку A' , точки K и T – неподвижные, то угол AKT переходит в угол $A'KT$, значит, эти углы равны, а так как они смежные, то

они прямые, то есть прямая AK перпендикулярна прямой a .

Далее приведем сравнительную таблицу для пучков прямых и простейших кривых (кривых постоянной кривизны) на евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского в модели Бельтрами-Клейна

E_2	L_2
<i>ПУЧКИ ПРЯМЫХ</i>	
Пучок пересекающихся прямых 	Пучок пересекающихся прямых 
Пучок параллельных прямых 	Пучок параллельных прямых 
	Пучок расходящихся прямых 
<i>КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА</i>	
<i>Простейшие кривые</i>	
Окружность 	Окружность 
	Орицикл 



Вопросы и упражнения

1. Из данной точки опустить перпендикуляр на данную прямую.
2. Дан отрезок, построить угол параллельности, соответствующий этому отрезку.
3. Дан угол. Построить отрезок так, чтобы данный угол был углом параллельности, соответствующим этому отрезку.
4. Построить середину данного отрезка.
5. Построить биссектрису данного угла.
6. На данном луче отложить от его начала отрезок, конгруэнтный данному.
7. Дан угол $\angle(h, k)$. Построить луч l так, чтобы луч k был биссектрисой угла $\angle(h, l)$.
8. Построить общий перпендикуляр двух данных расходящихся прямых.
9. Даны две точки A и S . Построить точку A' , симметричную точке A относительно точки S .
10. Построить прямую, симметричную данной прямой относительно данного центра.
11. Построить прямую, симметричную данной прямой относительно данной прямой.
12. Построить ось симметрии двух данных прямых (в случае, когда они пересекаются, параллельны или сверхпараллельны).
13. Изобразить три типа пучков прямых.
14. Дана окружность. Построить ее центр.

§13. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского

Анри Пуанкаре в 1882г. построил конформное отображение плоскости Лобачевского на открытую полуплоскость Евклида, тем самым, получив новую модель плоскости Лобачевского.

Возьмем на евклидовой плоскости прямую l . Прямая l делит плоскость на две полуплоскости. В роли плоскости Лобачевского возьмем одну из полуплоскостей с границей l , точки прямой l не принадлежат плоскости Лобачевского (L -плоскости), прямая l называется абсолютом.

Точками плоскости Лобачевского, т.е. неевклидовыми точками являются евклидовы точки выбранной полуплоскости, например, верхней.

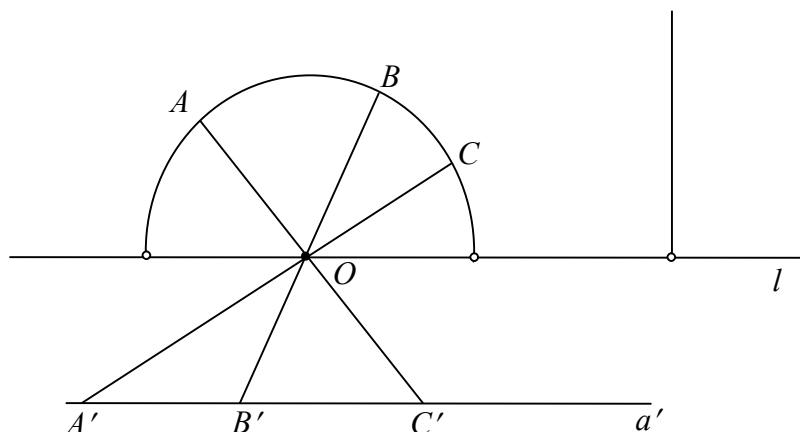


Рис.72

Роль прямых плоскости Лобачевского (неевклидовых прямых) будут выполнять:

- 1) евклидовы полупрямые, перпендикулярные прямой l (рис.72) без точки пересечения с l .
- 2) евклидовы полуокружности, перпендикулярные абсолюту, т.е. с центром на прямой l .

Отношение p_1 принадлежности точки прямой понимается в евклидовом смысле, аналогично и отношение p_3 – лежать между. Действительно, если три точки лежат на евклидовой полупрямой, перпендикулярной l , то полностью сохраняется, евклидов смысл этого понятия. Если A, B, C лежат на неевклидовой прямой второго вида, т.е. на

полуокружности с центром O на абсолюте l , то в этом случае мы говорим точка B лежит между точками A и C , если, точка B' лежит между точками A' и C' на евклидовой прямой a' (рис. 72).

Из определения отношений p_1 и p_3 следует, что аксиомы I-II групп выполняются. Аксиомы III группы пока пропустим.

Аксиомы непрерывности (IV группы) выполняются в верхней полуплоскости, так как неевклидову прямую и при первом ее определении, и при втором можно отобразить на евклидову так, как показано на рис.72, а для евклидовых прямых выполняется принцип Дедекинда.

Проверим теперь аксиому параллельности. Если в роли неевклидовых прямых выступают две полупрямые, перпендикулярные абсолюту, то параллельность понимается в евклидовом смысле.

Если в роли неевклидовых прямых мы возьмем полупрямую перпендикулярную l и полуокружность с центром на l или две полуокружности с центром на абсолюте l , то эти прямые называются параллельными, если они имеют общую точку на абсолюте (рис.73).

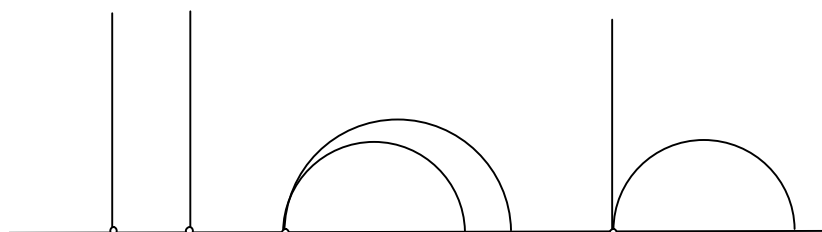


Рис.73

Возьмем теперь в верхней полуплоскости прямую a (полуокружность с центром на l) и точку A , не лежащую на прямой a .

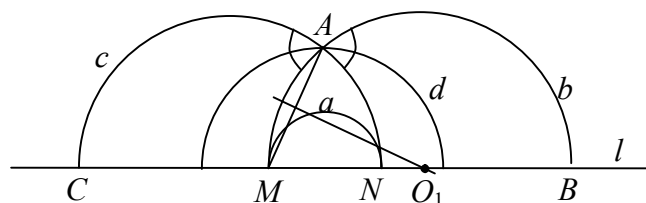


Рис.74

Построим серединный перпендикуляр к евклидову отрезку AM и найдем точку O_1 пересечения серединного перпендикуляра с прямой l . Построим полуокружность b с центром O_1 и радиусом

$O_1M=O_1A$. Полуокружность b параллельна a в направлении AM .

Аналогично строим неевклидову прямую (полуокружность), проходящую через точку A и параллельную a в направлении AN . Таким образом, через точку A проходит точно 2 прямых, параллельных прямой a и бесчисленное множество прямых сверхпараллельных к прямой a , например d , эти прямые лежат внутри вертикальных углов MAC и NAB , образованных прямыми b и c , параллельными a .

Следовательно, на полуплоскости евклидовой плоскости выполняется аксиома параллельности Лобачевского.

Предлагаем читателю рассмотреть самостоятельно другие случаи расположения точки A относительно прямой a , а также случаи, когда в роли неевклидовой прямой a выступает полупрямая, перпендикулярная абсолюту.

Вернемся теперь к аксиомам конгруэнтности III группы.

Отношения p_4 и p_5 в модели Пуанкаре определяются через «движение».

Движение плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре определяется через композицию осевых симметрий.

Роль осевой симметрии с осью a , где a – евклидова полуокружность, выполняет *инверсия с окружностью инверсии*, на которой лежит полуокружность a .

Если в роли неевклидовой прямой выступает полупрямая, перпендикулярная l , то симметрии понимаются в евклидовом смысле.

Напомним, что *инверсией с центром O и радиусом r* называется преобразование плоскости, при котором каждой точке M , ставится в соответствие точка $M' \in [OM)$ и выполняется условие

$$\overline{OMOM'} = r^2. \quad (13.1)$$

Точки M и M' называют инверсными, a – окружность инверсии, r – радиус инверсии. Из (13.1) следует, что точки неевклидовой прямой a – неподвижные при инверсии с окружностью a .

На рис.75 показано построение инверсных точек. При инверсии $M \rightarrow M'$ а $M' \rightarrow M$.

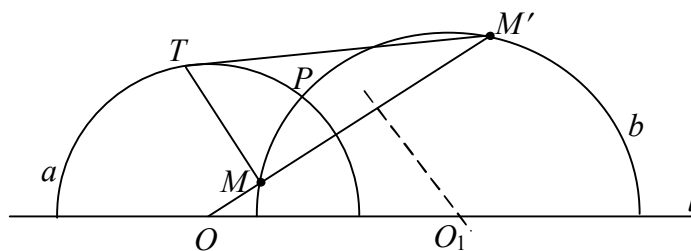


Рис.75

Любая инверсия сохраняет абсолют, т.е. l переходит в себя (прямая, проходящая через центр инверсии переходит при инверсии в себя), точки верхней полуплоскости переводит в точки верхней полуплоскости (это следует из определения инверсии).

На рис.75 точки M и M' симметричны в неевклидовом смысле относительно прямой a . Поэтому, чтобы из точки M' опустить перпендикуляр на прямую a , нужно через точку M' и инверсную ей точку M провести неевклидову прямую, на рис.75 – это полуокружность, перпендикулярная l . Отрезок $M'P$ неевклидовой прямой b перпендикулярен a . $\angle M'PT = 90^\circ$, он определяется как угол между касательными в точке P .

Отметим, что 1) величина неевклидова угла равна величине евклидова угла, 2) при инверсии сохраняется величина угла – это конформное преобразование плоскости.

И так как точки M и M' симметричны относительно прямой a в неевклидовом смысле, то неевклидов отрезок MP равен неевклидову отрезку $M'P$.

Введем теперь отношения конгруэнтности для отрезков и углов.

Возьмем два неевклидовых отрезка $[AB]$ и $[A'B']$. Отрезок AB будем называть конгруэнтным отрезку $A'B'$, если существует некоторое число таких инверсий, что их композиция переводит евклидову круговую дугу AB в евклидову круговую дугу $A'B'$.

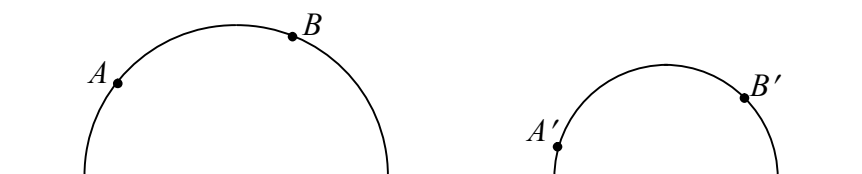


Рис.76

Аналогично, определяется отношение p_5 – конгруэнтности угла углу.

Далее можно показать, что аксиомы III группы выполняются. В частности, можно показать, что от заданной точки на данном луче можно отложить отрезок конгруэнтный данному. Решение этой задачи см. в [8]. Там же приведены все свойства инверсии.

Таким образом, мы показали, что на открытой полуплоскости евклидовой плоскости во множестве ее точек, полупрямых, перпендикулярных границе l полуплоскости и полуокружностей, перпендикулярных прямой l выполняются все аксиомы системы аксиом Σ^*_G Гильберта плоскости Лобачевского, значит, построенная модель – это модель плоскости Лобачевского.

Приведем решение еще одной задачи в модели Пуанкаре.

Задача. *Разделить неевклидов отрезок, изображаемый евклидовой дугой AB пополам.*

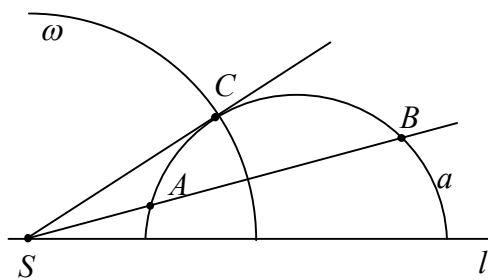


Рис.77

Проведем прямую AB до пересечения с абсолютом в точке S . Через точку S проведем касательную к окружности a – точка касания C . Тогда $SC^2 = SA \cdot SB$ (квадрат отрезка касательной равен произведению

отрезков секущей). Построим окружность ω с центром в точке S и радиусом SC . Рассмотрим инверсию с центром в точке S относительно окружности ω . Так как $SA \cdot SB = r^2$ ($r = SC$), то при указанной инверсии точка A перейдет в точку B , а точка B перейдет в точку A , точка C переходит сама в себя. Евклидова дуга AC переходит в евклидову дугу BC и наоборот. Точки A и B симметричны друг другу относительно ω , а значит ω перпендикулярна дуге AB , то есть ω перпендикулярна окружности a (неевклидова прямая ω перпендикулярна неевклидовой прямой a). Значит, неевклидов отрезок AC равен неевклидову отрезку BC и наоборот. Отсюда следует, что точка C – *середина неевклидова отрезка AB .*

Заметим, что точка C не является серединой евклидовой дуги AB .

Итак, мы рассмотрели две модели плоскости Лобачевского – Бельтрами-Клейна и модель Пуанкаре.

В этих моделях выполняется все аксиомы системы аксиом Гильберта кроме аксиомы параллельности Евклида, а вместо неё выполняется её отрицание, аксиома параллельности Лобачевского. Таким образом, построением этих моделей была доказана непротиворечивость планиметрии Лобачевского и независимость аксиомы параллельности Евклида от остальных аксиом системы аксиом Гильберта, а значит, решена проблема V постулата Евклида.

Вопросы и упражнения

В модели Пуанкаре на полуплоскости:

1. Из данной точки опустить перпендикуляр на данную прямую.
2. Дан отрезок, построить угол параллельности, соответствующий этому отрезку.
3. Дан угол. Построить отрезок так, чтобы данный угол был углом параллельности, соответствующим этому отрезку.
4. Построить середину данного отрезка.
5. Построить биссектрису данного угла.
6. На данном луче отложить от его начала отрезок, конгруэнтный данному.
7. Дан угол $\angle(h, k)$. Построить луч l так, чтобы луч k был биссектрисой угла $\angle(h, l)$.
8. Построить общий перпендикуляр двух данных расходящихся прямых.
9. Даны две точки A и S . Построить точку A' , симметричную точке A относительно точки S .
10. Построить прямую, симметричную данной прямой относительно данного центра.
11. Построить прямую, симметричную данной прямой относительно данной прямой.

12. Построить ось симметрии двух данных прямых (в случае, когда они пересекаются, параллельны или сверхпараллельны).
13. Изобразить три типа пучков прямых.
14. Дана окружность. Построить ее центр. В модели Пуанкаре изобразить окружность, эквидистанту, орицикл.
15. Даны точки O и A . Построить окружность с центром в точке O , проходящую через точку A .
16. Даны прямая p и точка A . Построить эквидистанту с базой p , проходящую через точку A .
17. Даны прямая p и точка A . Построить орицикл с базой p , проходящий через точку A .
18. Через данную точку провести касательную к данной эквидистанте.
19. Через данную точку провести касательную к данному орициклу.
20. Докажите, что любые два орицикла равны.

III. НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ В СХЕМЕ ВЕЙЛЯ.

В первом разделе мы наметили путь изучения евклидовой геометрии на основе системы аксиом Вейля. Кроме евклидовой геометрии существует геометрия Лобачевского или гиперболическая геометрия.

Обе эти геометрии объединяет то, что группа движений их максимальна, т.е. имеет максимальный порядок, равный 3. Кроме того, и евклидова плоскость, и плоскость Лобачевского имеют постоянную кривизну – для плоскости Евклида кривизна $K=0$, а для плоскости Лобачевского $K<0$.

Существуют и другие геометрии, обладающие аналогичными свойствами, т.е. кривизна $K=const$, и группа движений имеет максимальный порядок. К таким геометриям относятся: 1) сферическая геометрия (геометрия на сфере евклидова пространства); 2) эллиптическая геометрия Римана.

В настоящем разделе мы рассмотрим элементы сферической и эллиптической геометрий, а также покажем, что на сфере мнимого радиуса псевдоевклидова пространства выполняется геометрия Лобачевского.

§14. Элементы сферической геометрии.

Эллиптическая геометрия Римана

1. Элементы сферической геометрии.

Геометрию на сфере S^2 евклидова пространства E^3 называют *сферической геометрией*.

Возьмем в E^3 прямоугольную декартову систему координат $R = \{O, i, j, k\}$

Рассмотрим сферу с центром в начале координат, радиуса r .

Ее уравнение имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (14.1)$$

Роль прямых линий на сфере выполняют большие окружности, т.е. окружности, центр которых совпадает с центром сферы.

Геометрия на сфере отличается и от евклидовой геометрии, и от геометрии Лобачевского.

Действительно,

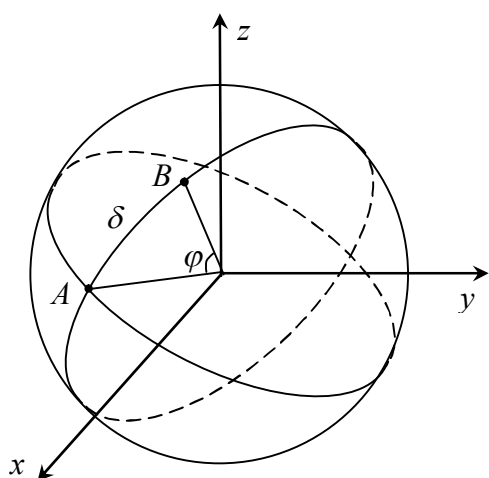


Рис.78

- 1) Так как любые две большие окружности на сфере пересекаются в двух точках, то на сфере не выполняется ни аксиома параллельности Евклида, ни аксиома параллельности Лобачевского.
- 2) Нет понятия «между» для трех точек, лежащих на одной прямой, нет понятия отрезка.
- 3) Прямая на сфере замкнута и имеет конечную длину $l = 2\pi r$.

Сферическая геометрия является метрической. Введем метрику на сфере. Возьмем любые 2 точки A и B на сфере (рис.78). За расстояние между точками A и B принимается длина дуги большой окружности, проходящей через эти точки, меньшей полуокружности.

Обозначим расстояние $\rho(A, B)$ между A и B через δ .

$$\rho(A, B) = \delta, \overline{OA} = x, \overline{OB} = y, \angle AOB = \varphi \text{ тогда } \delta = \varphi r, \varphi = \frac{\delta}{r}$$

$$\cos \frac{\delta}{r} = \frac{xy}{|x||y|}, \quad (14.2)$$

$\frac{\delta}{r}$ — называется приведенным расстоянием между точками A и B . Введем координаты точек: $A(x, y, z)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, тогда

$$\cos \frac{\delta}{r} = \frac{|xx_1 + yy_1 + zz_1|}{r^2} \quad (14.3)$$

Формулой (14.3) вводится метрика на сфере.

Движения сферы.

Определение 1. Движениями сферы будем называть преобразования точек сферы, сохраняющие расстояния.

Очевидно, движениями сферы будут являться движения трехмерного евклидова пространства, оставляющие центр сферы на месте. Примерами движений сферы будут повороты точек сферы около диаметра (рис. 79) и отражения сферы от диаметральной плоскости (рис. 80):

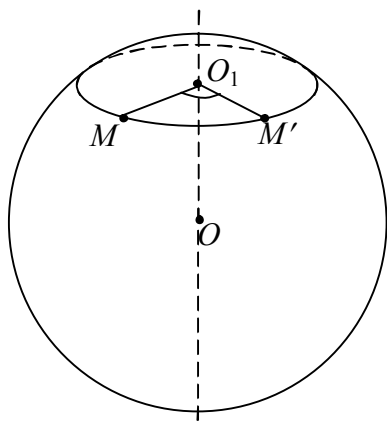


Рис. 79

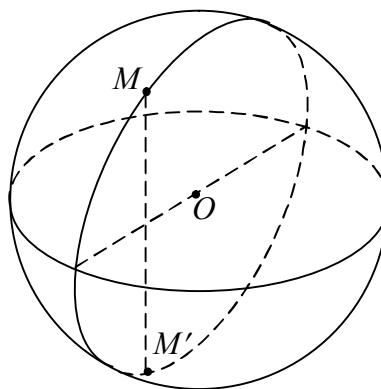


Рис. 80

Нетрудно видеть, что множество всех движений сферы образует группу, которая изоморфна стационарной подгруппе точки O в группе движений пространства, а значит, изоморфна группе ортогональных преобразований пространства. Следовательно, порядок группы движений сферы равен трем.

Предмет сферической геометрии можно определить как совокупность свойств фигур на сфере, не изменяющихся при любом движении сферы.

Простейшие фигуры на сфере.

Определение 2. Окружностью на сфере называется множество

точек, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки сферы.

O_1 – центр окружности. Дуга O_1A большой окружности – радиус. Мы видим, что роль окружностей на сфере выполняют малые окружности.

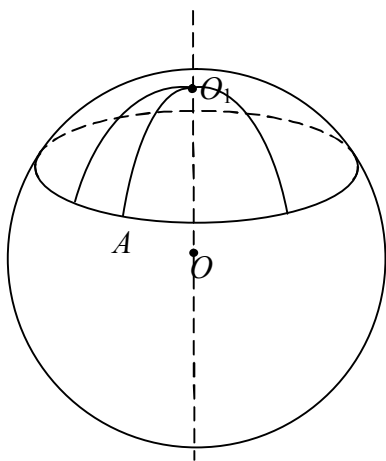


Рис. 81

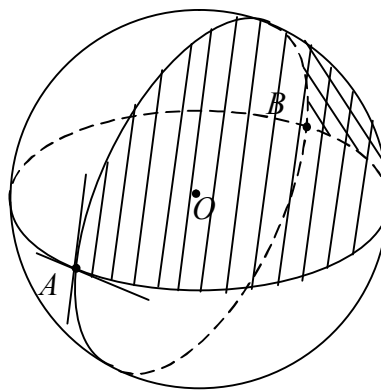


Рис. 82

Определение 3. Сферический двугольник это часть сферы, заключенная между двумя большими окружностями.

Двугольник на сфере является аналогом угла на плоскости. Угол двугольника можно рассматривать как угол между касательными к большим окружностям в точках A и B .

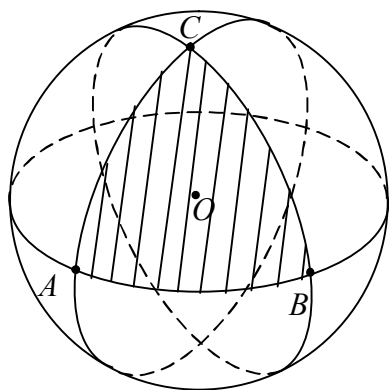


Рис. 83

Определение 4. Сферическим треугольником называется совокупность трех точек A, B, C сферы, не лежащих на одной большой окружности, и трех дуг AB, BC, AC больших окружностей, меньших полуокружностей.

A, B, C – вершины, $\cup AB, \cup BC, \cup AC$ – стороны, $\angle A, \angle B, \angle C$ – углы треугольника, определяются как углы между касательными к сторонам в вершинах.

Так как геодезическими на сфере являются большие окружности, то сферический треугольник является геодезическим, следовательно, $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$, т.е. сумма углов сферического треугольника больше 180° .

Далее рассмотрим элементы сферической тригонометрии.

1. Формулы прямоугольного треугольника.

Треугольник ABC на сфере называется прямоугольным, если $\angle C$ – прямой.

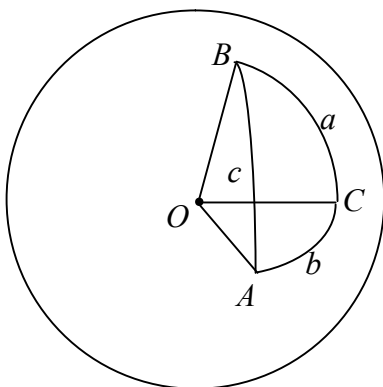


Рис.84

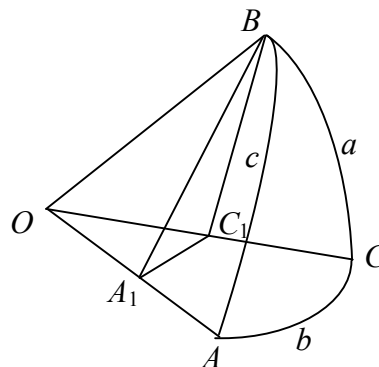


Рис.85

Обозначим длины сторон $\triangle ABC$ a, b, c соответственно. Тогда центральные углы $\angle COB = \varphi = \frac{a}{r}$, $\angle AOC = \psi = \frac{b}{r}$, $\angle AOB = \frac{c}{r}$.

Проведем $BC_1 \perp OC$, $BA_1 \perp OA$, тогда $\triangle OBC_1$ – прямоугольный,

$$BC_1 = r \sin \varphi = r \sin \frac{a}{r} \quad (14.4)$$

$\triangle OBA_1$ – прямоугольный,

$$BA_1 = r \sin \frac{c}{r} \quad (14.5)$$

$$\triangle A_1BC_1, \quad BC_1 = BA_1 \sin A \quad (14.6)$$

Подставим в (14.6) выражение BA_1 из (14.5)

$$BC_1 = r \sin \frac{c}{r} \sin A \quad (14.7)$$

Приравниваем правые части (14.5) и (14.7)

$$\begin{aligned} r \sin \frac{a}{r} &= r \sin \frac{c}{r} \sin A \quad \text{или} \\ \sin \frac{a}{r} &= \sin \frac{c}{r} \sin A \end{aligned} \quad (14.8)$$

Мы получили следующее:

Синус приведенного катета равен произведению синуса приведенной гипотенузы на синус противолежащего угла.

Нетрудно вывести теорему Пифагора. (см. рис.85).

$$\text{Из } \triangle OBC_1 : OC_1 = r \cos \frac{a}{r}$$

$$\text{Из } \triangle OBA_1 : OA_1 = r \cos \frac{c}{r} \quad (14.9)$$

$$\text{Из } \triangle OC_1A_1 : OA_1 = OC_1 \cos \frac{b}{r} \quad (14.10)$$

В последнем равенстве заменим OC_1 :

$$OA_1 = r \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r}.$$

Приравниваем правые части (14.9) и (14.10)

$$r \cos \frac{c}{r} = r \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} \text{ или}$$

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} - \text{теорема Пифагора.}$$

Косинус приведенной гипотенузы равен произведению косинусов приведенных катетов.

Приведем без доказательства теоремы косинусов и синусов для произвольного сферического треугольника.

Теорема косинусов.

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} + \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos C.$$

Теорема синусов.

$$\frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{b}{r}}{\sin B} = \frac{\sin \frac{c}{r}}{\sin C}$$

Если линейные размеры треугольника на сфере будут малы по сравнению с радиусом сферы, то нетрудно получить, что формулы сферической тригонометрии будут совпадать с соответствующими формулами евклидовой геометрии (см.[3], стр.110).

2. Эллиптическая геометрия Римана

В предыдущем пункте мы познакомились с простейшими фактами сферической геометрии, в которой всякие две прямые пересекаются в двух различных точках. Для того, чтобы прийти к новой геометрии, в которой прямые имели бы не более одной общей точки, условимся считать всякую пару диаметрально противоположных точек сферы за одну. К созданию

эллиптической геометрии пришел Б. Риман (XIXв.), впоследствии Кэли и Клейн построили проективную модель эллиптической геометрии.

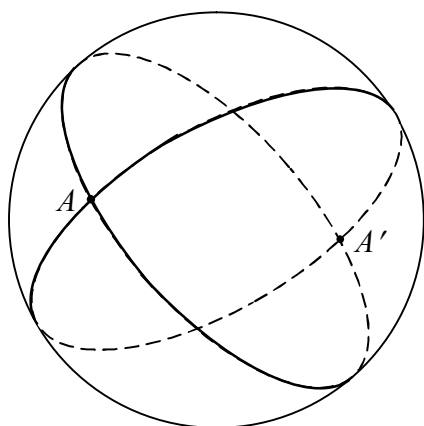


Рис.86

Итак, возьмем сферу в E^3 и отождествим точки пересечения любых двух больших окружностей на сфере, т.е. отождествим любые две диаметрально противоположные точки сферы.

Тогда большие окружности будут пересекаться в одной точке. Мы получим множество S пар диаметрально противоположных точек сферы:

$$S = \{(A, A'), (B, B'), (C, C') \dots\}$$

Это множество S будем называть *эллиптической плоскостью*. Роль прямых линий выполняют большие окружности, любые две диаметрально противоположные точки которой отождествлены.

Геометрия эллиптической плоскости отлична от геометрии Евклида и от геометрии Лобачевского, и от сферической геометрии, так как любые две прямые на эллиптической плоскости пересекаются в одной точке, на рис.86 – это точка (A, A') . На эллиптической плоскости нет параллельных прямых, а значит, не выполняется ни аксиома параллельности Евклида, ни аксиома параллельности Лобачевского.

Прямая на эллиптической плоскости является замкнутой, нет понятия «лежать между» для трех точек одной прямой, не выполняются аксиомы порядка. Сумма углов треугольника на эллиптической плоскости больше двух прямых.

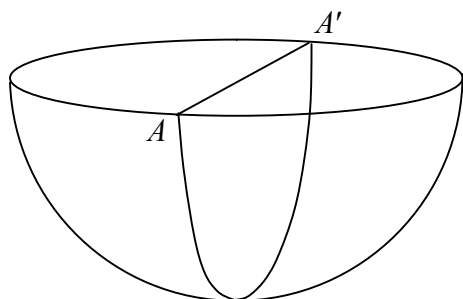


Рис.87

В качестве второй модели эллиптической плоскости можно взять полусферу евклидова пространства с отождествленными диаметрально противоположными точками экватора $A=A'$.

Роль прямых в этой модели выполняют большие полуокружности с

отождествленными любыми двумя диаметрально противоположными точками экватора ($A=A'$ на рис.87)

Отсюда легко видеть, что эллиптическая прямая замкнута и имеет конечную длину πR (R - радиус сферы).

Существует определенная связь между эллиптической плоскостью S^2 и проективной плоскостью.

Как известно, рассмотренные модели эллиптической плоскости являются также моделями проективной плоскости. Значит, эллиптическая плоскость— это проективная плоскость, на которой введена метрика.

Введем метрику на эллиптической плоскости.

В роли модели возьмем сферу S^2 радиуса R с отождествленными любыми двумя диаметрально противоположными точками. Число R называют радиусом кривизны плоскости S^2 , а $\frac{1}{R^2}$ — кривизной плоскости S^2 .

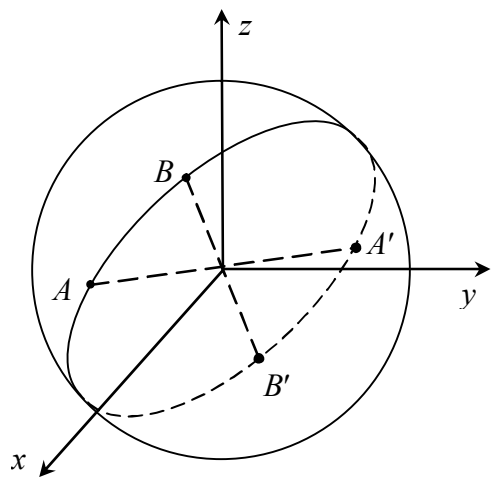


Рис.88

За расстояние d между точками A и B принимают длину дуги большой окружности, проходящей через эти точки, меньшей полуокружности; $\frac{d}{R}$ — приведенное расстояние между точками A и B .

Пусть $A(x, y, z)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ в прямоугольной декартовой системе координат, то

$$\cos \frac{d}{R} = \frac{|xx_1 + yy_1 + zz_1|}{R^2}, \quad (14.11)$$

$$d < \frac{\pi R}{2}, \text{ если } d = \frac{\pi R}{2}, \text{ то } \frac{d}{R} = \frac{\pi}{2} \text{ и тогда из (14.11)}$$

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0 \quad (14.12)$$

Если выполняется условие (14.12), то точки A и B называются полярно сопряженными, если при этом x_1, y_1, z_1 , т.е. координаты точки B будут фиксированными, а точка A будет переменной, то мы получим

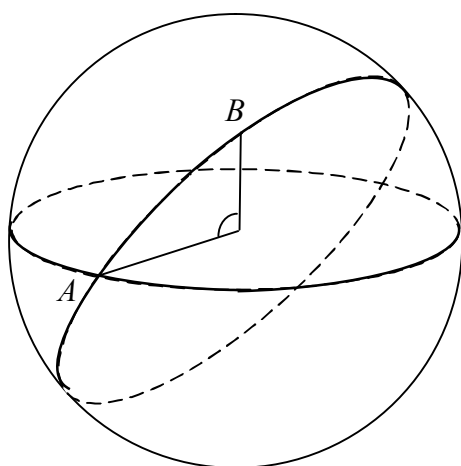


Рис.89

множество точек полярных к точке B и точка A будет описывать большую окружность, а большая окружность выполняет роль прямой на эллиптической плоскости (рис.89).

Значит, уравнение (14.12), в котором x_1, y_1, z_1 – фиксированные числа, а x, y, z – переменные, можно рассматривать как уравнение прямой на эллиптической

плоскости. Эта прямая называется полярной точки B , а точка B – полюсом прямой (14.12). Прямые перпендикулярные прямой, пересекаются в ее полюсе. Обратно, всякая прямая, проходящая через полюс данной прямой, будет перпендикулярна этой прямой. Отсюда следует, что через каждую точку плоскости, отличную от полюса, можно провести единственный перпендикуляр к этой прямой. Эти свойства непосредственно вытекают из определения полюсов и поляр [3].

Как было отмечено выше, моделью эллиптической плоскости может служить полусфера с отождествленными диаметрально противоположными точками экватора, тогда на эллиптической плоскости выполняются теоремы сферической геометрии: теорема косинусов, теорема синусов, теорема Пифагора и другие теоремы в том же виде как в сферической геометрии (см. пункт 1 настоящего параграфа).

Можно доказать, что для площади S треугольника на эллиптической плоскости выполняется формула

$$S_{\Delta} = R^2 (A + B + C - \pi),$$

A, B, C – углы эллиптического треугольника

$A + B + C - \pi$ – избыток треугольника, так как $S > 0$, то $A + B + C > \pi$, т.е. сумма углов треугольника на эллиптической плоскости больше 180° .

Окружности на эллиптической плоскости

Определение. Окружностью на эллиптической плоскости называется множество точек, находящихся на одинаковом расстоянии от одной данной точки, называемой центром.

Возьмем в качестве модели эллиптической плоскости сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками.

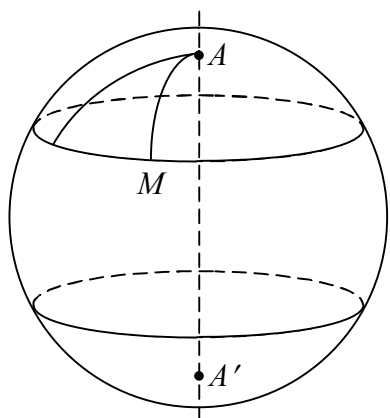


Рис.90

Пусть A – центр окружности, тогда дуга MA большой окружности сферы – радиус. Роль окружности эллиптической плоскости на этой модели выполняют две малые окружности сферы, расположенные симметрично относительно центра сферы.

Рассмотрим взаимное расположение двух окружностей на эллиптической плоскости.

1. Две окружности пересекаются в четырех точках (рис. 91);
2. Две окружности пересекаются в трех точках (рис.92);

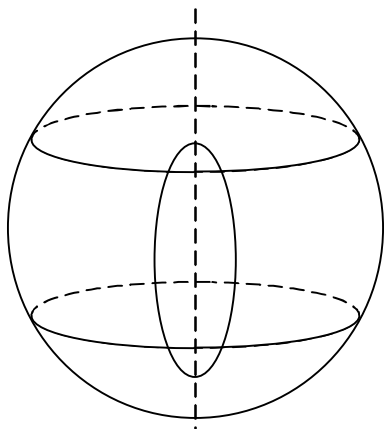


Рис.91

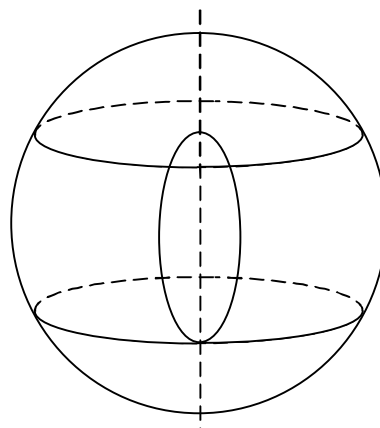


Рис.92

3. Две окружности пересекаются в двух точках (рис. 93);

4. Две окружности не пересекаются (рис. 94).

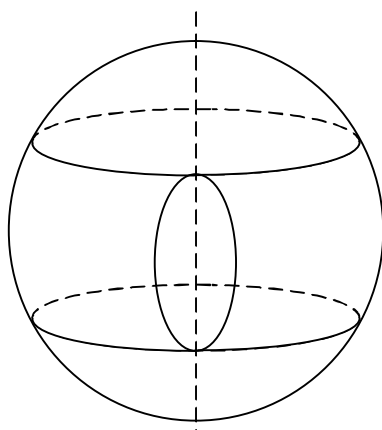


Рис.93

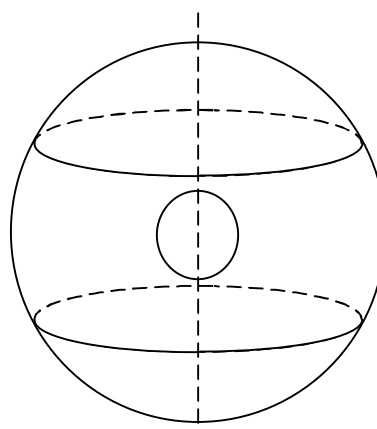


Рис.94

Аксиоматическое определение эллиптической плоскости.

Выше мы познакомились с некоторыми фактами эллиптической геометрии как геометрии сферы евклидова пространства, факторизованной по отношению диаметральной противоположности точек.

Приведем определение двумерной эллиптической геометрии, в основе которой лежит понятие евклидова векторного пространства.

Пусть S - множество точек:

$$S = \{A, B, X, Y, \dots\},$$

V^3 – трехмерное евклидово векторное пространство.

Совокупность точек S называется *эллиптической плоскостью*, если задано отображение $\pi: V' \rightarrow S$ где $V' = V^3 \setminus \{\theta\}$, причем выполняются следующие три свойства (аксиомы):

1. отображение π - сюръекция;
2. $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ - коллинеарны, т.е., когда $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, $\lambda \in R$;
3. Существует такое число $R > 0$ и такая неотрицательная функция $d(X, Y)$ (расстояние между точками $X(\vec{x})$ и $Y(\vec{y})$), что

$$\cos \frac{d(X, Y)}{R} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|},$$

где $\vec{x} \cdot \vec{y}$ – скалярное произведение векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V^3$, причем $\pi(\vec{x}) = X, \pi(\vec{y}) = Y$.

Число R называется *радиусом кривизны* эллиптической плоскости S_2 .

Аксиомы 1-3 определяют на S_2 род структур, называемых *двумерными эллиптическими пространствами*. Эллиптическая геометрия определяется как теория этих структур. Нетрудно убедиться, что система аксиом 1-3 эллиптической геометрии является категоричной (см.[6],стр.117).

Вопросы и упражнения

1. Доказать, что каждая сторона сферического треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше их разности.
2. Доказать, что если в сферическом треугольнике две стороны конгруэнтны, то конгруэнтны и углы, противолежащие им.
3. Доказать, что в сферическом треугольнике против конгруэнтных углов лежат конгруэнтные стороны.
4. Доказать, что в сферическом треугольнике против большего угла лежит большая сторона.
5. Доказать, что в сферическом треугольнике с длинами сторон a, b, c и величинами противолежащих им углов $\angle A, \angle B, \angle C$ справедлива следующая «формула пяти элементов»:

$$\sin \frac{a}{r} \cos \angle B = \sin \frac{c}{r} \cos \frac{b}{r} - \cos \frac{c}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \angle A,$$

где r – радиус сферы, содержащей данный треугольник.

6. Доказать теорему синусов для сферического треугольника

$$\frac{\sin \frac{a}{r}}{\sin \angle A} = \frac{\sin \frac{b}{r}}{\sin \angle B} = \frac{\sin \frac{c}{r}}{\sin \angle C}.$$

7. Доказать, что в прямоугольном сферическом треугольнике $\left(\angle A = \frac{\pi}{2}\right)$: $\sin \frac{b}{r} = \sin \frac{a}{r} \cdot \sin \angle B$.
8. Доказать, что в прямоугольном сферическом треугольнике $\left(\angle A = \frac{\pi}{2}\right)$: $\cos \angle B = \sin \angle C \cdot \cos \frac{b}{r}$.
9. Доказать, что на эллиптической плоскости любые две прямые пересекаются.
10. В каком случае окружность на эллиптической плоскости является прямой?

11. Найти расстояние между серединами двух отрезков, имеющих общие концы.
12. Доказать, что на эллиптической плоскости существуют только три типа движений: поворот на угол, отличный от π , центральная (или осевая) симметрия и тождественное преобразование.
13. Доказать, что три точки, не принадлежащие одной прямой, являются вершинами четырех треугольников и для каждого из них выполняется неравенство треугольника.
14. Доказать, что через три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести четыре окружности.
15. Найти зависимость между сторонами четырехугольника, чтобы около него можно было описать окружность.
16. Дан треугольник ABC . Доказать, что если $d(A,C) + d(B,C) = \pi r$, то длина медианы CC_1 равна $\frac{\pi}{2}r$.

§15. Псевдоевклидово пространство.

Реализация геометрии Лобачевского на сфере мнимого радиуса

1. Евклидово n -мерное пространство E^n можно определить по Вейлю как математическую структуру следующего вида:

$$E^n = \{T, V, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} + \Sigma_w,$$

Σ_w – система аксиом Вейля, состоящая из пяти групп аксиом (см. §4).

Напомним, что первые три группы аксиом и пятая группа определяют n -мерное аффинное пространство A^n , первые три группы – векторное пространство V^n , которое, как известно, называется пространством переносов аффинного пространства. Чтобы определить n -мерное евклидово пространство, надо добавить IV группу аксиом, которая описывает операцию скалярного произведения векторов φ_3 и свойства этой операции: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad \varphi_3(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = g(\vec{x}, \vec{y})$ – положительно определенная билинейная форма, т.е. имеют место следующие свойства скалярного произведения векторов

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$, т.к. форма $g(\vec{x}, \vec{y})$ – симметрическая,
2. $(\lambda \vec{x} \cdot \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y})$,
3. $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$.

Второе и третье свойства следуют из того, $g(\vec{x}, \vec{y})$ – билинейная форма.

$\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x}^2$ или $\vec{x}^2 = g(\vec{x}, \vec{x})$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{x}$ и для него выполняется следующее четвертое свойство:

4. Для любого ненулевого вектора $\vec{x} \quad \vec{x}^2 > 0$; $\vec{x}^2 = 0$ только для $\vec{x} = \vec{0}$.

Свойства 1-4 называются аксиомами скалярного произведения векторов. Векторное пространство V^n , на котором задана положительно определенная билинейная форма $g(\vec{x}, \vec{y})$ – скалярное произведение векторов, называется *евклидовым векторным пространством*, а аффинное пространство A^n , пространство переносов которого V^n является евклидовым векторным пространством, называется *евклидовым пространством E^n* .

Заменяем теперь аксиому 4 на 4':

4'. В векторном пространстве V существуют *ненулевые* векторы трех типов:

$$1) \vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x}^2 > 0, \quad 2) \vec{x}^2 < 0, \quad 3) \vec{x}^2 = 0.$$

Другими словами, на векторном пространстве V задана невырожденная, симметрическая билинейная форма $g(\vec{x}, \vec{y})$, при этом квадратичная форма $g(\vec{x}, \vec{x})$ не является положительно определенной, $g(\vec{x}, \vec{x})$ – невырожденная.

Векторное пространство V с заданным скалярным произведением векторов, удовлетворяющим аксиомам 1-3, 4', называется *псевдоевклидовым векторным пространством*, а аффинное пространство A^n , пространством переносов которого является псевдоевклидово векторное пространство V^n , называется *псевдоевклидовым пространством*.

1. Так же как и в евклидовом пространстве вводится понятие длины или нормы вектора, а именно:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}.$$

Если $\vec{x}^2 > 0$, то $|\vec{x}|$ – действительное число, вектор действительной длины называется *временеподобным*, если $\vec{x}^2 < 0$, то $|\vec{x}|$ – комплексное число, точнее мнимое, вектор мнимой длины называется *пространственноподобным*, и если $\vec{x}^2 = 0$, $|\vec{x}| = 0$, вектор нулевой длины называется *изотропным*.

Например, если в двумерном псевдоевклидовом пространстве на оси (Ox) – действительные векторы, на оси (Oy) – мнимые, тогда на биссектрисах координатных углов будут расположены изотропные векторы.

2. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $\vec{x} \cdot \vec{y} = g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

3. Можно ввести ортонормированный базис, векторы этого базиса являются попарно ортогональными и часть из них являются единичными, а остальные мнимоединичными: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$, причем

$$\begin{aligned}\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j &= 0, \quad i \neq j, \\ \vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \dots = \vec{e}_k^2 &= 1, \vec{e}_{k+1}^2 = \vec{e}_{k+2}^2 = \dots = \vec{e}_n^2 = -1.\end{aligned}\quad (15.1)$$

Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ заданы своими координатами относительно базиса B , $\vec{x}\{x^i\}$, $\vec{y}\{y^i\}$, $i = \overline{1, n}$, тогда

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^k y^k - x^{k+1} y^{k+1} - \dots - x^n y^n, \quad (15.2)$$

$$\vec{x}^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \dots - (x^n)^2. \quad (15.3)$$

Число $l=n-k$ отрицательных квадратов в каноническом виде квадратичной формы $\vec{x}^2 = g(\vec{x}, \vec{x})$ называется индексом псевдоевклидова векторного пространства, псевдоевклидово векторное пространство индекса l будем обозначать V_l^n .

В псевдоевклидовом точечном пространстве E_l^n можно ввести ортонормированный репер $R = \{O, \vec{e}_i\}$ – это аффинный репер, базис которого – ортонормированный, т.е. выполняются формулы (15.1). Тогда, используя (15.3), можно показать, что расстояние между точками $A(a^1, a^2, \dots, a^n)$ и $B(b^1, b^2, \dots, b^n)$ выражается формулой:

$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$, в координатах имеем

$$\rho(A, B) = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + \dots + (b^k - a^k)^2 - (b^{k+1} - a^{k+1})^2 - \dots - (b^n - a^n)^2}. \quad (15.4)$$

В дальнейшем мы рассмотрим псевдоевклидово трехмерное пространство E_1^3 .

В пространстве E_1^3 , трехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1, среди трех координатных векторов ортонормированного репера два – единичные, а третий – мнимоеединичный. Будем считать, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – единичные, а $\vec{e}_3$ – мнимоеединичный:

$$\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = -\vec{e}_3^2 = 1, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \quad i \neq j. \quad (15.5)$$

В этой системе координат скалярное произведение двух векторов

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{y} = y^1 \vec{e}_1 + y^2 \vec{e}_2 + y^3 \vec{e}_3$$

и квадрат длины вектора $\vec{x}$, очевидно, вычисляются по формулам вида

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (15.6)$$

$$\vec{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (15.7)$$

Из (15.4) следует, что расстояние между точками $A(a^1, a^2, a^3)$ и $B(b^1, b^2, b^3)$ выражается формулой

$$\rho(A, B) = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2 - (b^3 - a^3)^2}. \quad (15.8)$$

Величиной угла между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется число, определенное по формуле

$$\cos^2 \varphi = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\vec{x}^2 \cdot \vec{y}^2}. \quad (15.9)$$

Если векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ одной природы, т. е. оба пространственные или временные, то $\cos^2 \varphi > 0$. Более того, $\cos^2 \varphi \leq 1$, если для x , y выполняется неравенство Коши и $\cos^2 \geq 1$, если неравенство это не выполняется. Полагая в последнем случае $\cos \varphi = \operatorname{ch} \psi$, мы получим $\varphi = i \psi$, и формула (15.9) запишется так:

$$\operatorname{ch}^2 \psi = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\vec{x}^2 \cdot \vec{y}^2}.$$

б) В псевдоевклидовом пространстве существует три типа прямых в зависимости от природы ее направляющего вектора. Здесь существуют также три вида плоскостей в зависимости от природы ее нормального вектора.

в) Подробнее рассмотрим вопрос о сферах. Сферой псевдоевклидова пространства E_1^3 называется множество точек этого пространства, отстоящих от данной точки A , называемой *центром сферы*, на одно и то же расстояние r . Величина r называется *радиусом сферы*.

Выбирая прямоугольную систему координат с началом в центре сферы, мы убедимся в том, что координаты x^1 , x^2 , x^3 текущей точки сферы радиуса r удовлетворяют уравнению

$$x^{1^2} + x^{2^2} - x^{3^2} = r^2. \quad (15.10)$$

Ясно, что первые два координатных вектора прямоугольной системы здесь предполагаются единичными, а третий вектор – мнимоединичным.

В псевдоевклидовом пространстве существуют три типа сфер вещественного, чисто мнимого и нулевого радиуса.

Уравнение сферы вещественного радиуса r совпадает с (15.10), в котором величина r вещественная. Если сфера чисто мнимого радиуса $r = ki$, где k вещественное, то уравнение (15.10) приводится к виду

$$x^{1^2} + x^{2^2} - x^{3^2} = -k^2. \quad (15.11)$$

Если же сфера будет нулевого радиуса, то из (15.10) следует, что

$$x^{1^2} + x^{2^2} - x^{3^2} = 0. \quad (15.12)$$

У евклидова и псевдоевклидова пространства – общая аффинная база. Уравнение (15.12) в аффинном пространстве является уравнением конуса, а предыдущие два – уравнениями гиперболоидов.

Ясно, что конус (15.12) состоит из асимптот сфер (15.10, 15.11), имеющих центр в начале координат. Очевидно, асимптотический конус сферы совпадает с изотропным конусом ее центра. Из уравнения (15.8) следует также, что на сферах псевдоевклидова пространства имеются прямолинейные образующие – прямые целиком лежащие на сфере.

Очевидно, линией пересечения сферы с плоскостью является окружность. Если секущая плоскость проходит через начало координат, то радиус окружности принимает значение, равное радиусу сферы. Получаемые таким образом окружности сферы называются *большими окружностями*.

За *сферическое расстояние* ρ между двумя точками $M(\vec{x})$, $N(\vec{y})$ сферы мы принимаем расстояние по большой окружности, соединяющей данные точки. Очевидно, это расстояние равняется произведению радиуса сферы на значение угла, образованного радиусами векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Следовательно, сферическое расстояние ρ определяется по формуле

$$\cos \frac{\rho}{r} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{r^2}. \quad (15.13)$$

Если сфера чисто мнимого радиуса $r = ki$, то формула (15.13) приводится к виду

$$\operatorname{ch} \frac{\rho}{r} = -\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{k^2}. \quad (15.14)$$

2. В §3 мы перечислили аксиомы Гильберта плоскости Лобачевского. Убедимся теперь, что геометрия сферы чисто мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве является двумерной геометрией Лобачевского. Ограничиваясь лишь одной, например, верхней полый сферы, покажем, что во множестве ее точек и больших окружностей осуществляется планиметрия Лобачевского. Для простоты эти точки можно спроектировать из центра сферы (рис. 95) на касательную к ней плоскость в точке N . Эта плоскость будет евклидовой. Кривую пересечения касательной плоскости с изотропным конусом будем называть *абсолютом*.

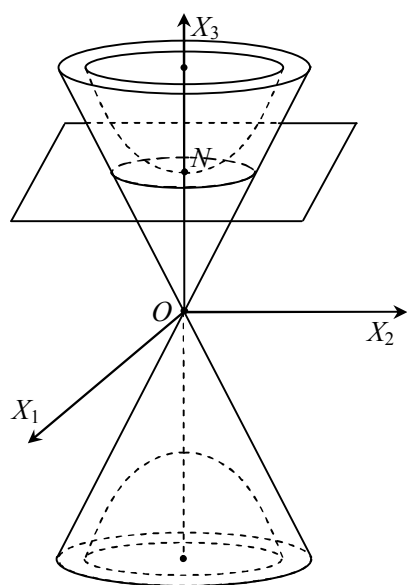


Рис.95

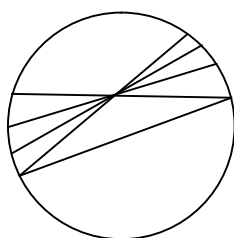


Рис.96

При проектировании точки полусферы перейдут во внутренние точки круга, ограниченного абсолютом, а большие окружности - в хорды абсолюта. Очевидно, последние являются линиями пересечения плоскостей больших окружностей с внутренностью абсолюта. Инцидентность точек и прямых понимается в обычном смысле.

Ясно, что в системе точек внутренности абсолюта и его хорд выполняются аксиомы Гильберта плоскости Лобачевского, то есть мы пришли к модели Бельтрами – Клейна во внутренности круга евклидовой плоскости (см. §11). А так как между точками и большими полуокружностями сферы чисто мнимого радиуса и точками и хордами внутренности круга евклидовой плоскости существует взаимнооднозначное соответствие, то геометрия сферы чисто мнимого радиуса

совпадает с двумерной геометрией Лобачевского.

Приведенные в настоящем разделе рассуждения позволяют принять следующее общее определение n – мерных неевклидовых геометрий [10].

Неевклидовыми геометриями n – измерений называются геометрии, которые порождаются на n – мерных сферах S_n вещественного или чисто мнимого радиуса в $(n+1)$ - мерном евклидовом соответственно псевдоевклидовом пространстве. Предполагается также, что диаметрально противоположные точки этих сфер отождествлены, т. е. такие пары точек считаются за одну точку.

Из этого определения следует, что при возрастании n число типов неевклидовых пространств также растет. Неевклидовы геометрии являются геометриями простейших римановых пространств определенной и неопределенной метрики, составляющих так называемый *класс пространств постоянной ненулевой кривизны*. Каждое из таких n – мерных пространств допускает группу движений, зависящую от $n(n+1)/2$ параметров.

Очевидно, при $n = 2$ мы получим *эллиптическую плоскость* и *плоскость Лобачевского*. Геометрия этих плоскостей будет соответственно геометрией сферы евклидова пространства и геометрией сферы чисто мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве.

IV. ДЛИНЫ. ПЛОЩАДИ. ОБЪЕМЫ

§16. Длина отрезка. Теорема существования и единственности.

Площадь многоугольника. Теорема о площади прямоугольника

1. Длина отрезка.

Пусть L – множество всех отрезков евклидовой плоскости E^2 .

$$L = \{a, b, c, \dots\}$$

Определение. Говорят, что на множестве L задано измерение отрезков, если задано отображение $l: L \rightarrow R^+$ которое каждому отрезку a ставит в соответствие положительное число $l(a) \in R^+$, называемой *длиной отрезка*, при этом выполняются следующие свойства (аксиомы длины отрезка):

1. Равные отрезки имеют равные длины, т.е. $a = b \Rightarrow l(a) = l(b)$. Равенство отрезка определяется через движение. Первая аксиома – это аксиома инвариантности длины отрезка при движении.
2. Если отрезок c состоит из двух отрезков a и b без общих внутренних точек: $c = a + b$, то $l(c) = l(a) + l(b)$. Вторая аксиома выражает свойство аддитивности длины отрезка.
3. Во множестве L существует отрезок e длина которого равна 1: $l(e) = 1$. Отрезок e называется единичным.

Далее доказывается теорема о существовании и единственности длины отрезка.

2. Теорема. Длина отрезка существует и единственна

Доказательство существования длины отрезка проводится по-разному, в зависимости от аксиоматики, на основе которой строится курс геометрии.

а) Если евклидова геометрия построена на основе систем аксиом Гильберта и Александрова (т.е. в систему аксиом входят аксиомы Архимеда и Кантора), то длина отрезка определяется путем измерения данного отрезка с помощью единичного отрезка (см. § 3 настоящего пособия).

Если данный отрезок соизмерим с единичным отрезком, то длина отрезка выражается рациональным числом, если несоизмерим, то длина отрезка- число иррациональное.

б) Если евклидова геометрия построена на основе системы аксиом А.В.Погорелова, то длина отрезка является основным понятием, существование и единственность длины отрезка постулируется в аксиомах.

Свойство аддитивности длины отрезка также заложено в аксиомах. В аксиоматике Погорелова явно ничего не сказано о единичном отрезке, но его существование подразумевается.

с) Если курс геометрии построен на основе системы аксиом Вейля, то за длину отрезка AB принимается расстояние между точками A и B .

Функция $l(AB) = \rho(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{AB^2}$, или $l(a) = \sqrt{a^2}$. Нетрудно показать, что аксиомы 1-3 длины отрезка для функции $l(AB)$ выполняются, тем самым доказываем существование длины отрезка.

Докажем *единственность* длины отрезка.

Пусть отрезок AB имеет длину x :

$l(AB) = x$. Предположим, что существует еще одна функция $f(AB) \neq x$.

Так как обе функции удовлетворяют аксиомам 1-3 длины отрезка, то функцию f можно определить как функцию аргумента x - длины отрезка AB : $f(AB) = f(x)$. Надо доказать, что $f(x) = x$.

При доказательстве рассмотрим следующие случаи:

1) $x \in N, x = n$. Тогда

$$f(n) = f(1+1+\dots+1) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = 1+1+\dots+1 = n. \quad (16.1)$$

Итак, $f(n) = n$.

2) $x \in \mathbf{Q}$, x – рациональное число, $x = \frac{m}{n}$. Тогда

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right) = m \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) \quad (16.2)$$

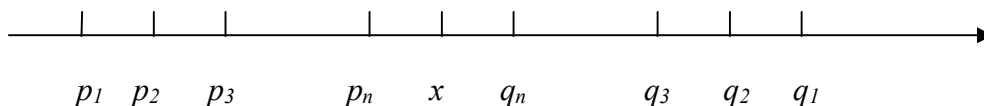
$$f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right), \text{ отсюда}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad (16.3)$$

Подставим (3) в (2), получим

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \quad (16.4)$$

3) Пусть $x \in \mathbf{J}$, x – иррациональное число, тогда существуют последовательности рациональных чисел, сходящихся к x слева и справа, т.е. $p_n \prec x \prec q_n$



$\lim p_n = x$, $\lim q_n = x$, тогда $f(p_n) \prec f(x) \prec f(q_n)$, но $f(p_n) = p_n$, $f(q_n) = q_n$ (доказано в [2]),

$$p_n \prec f(x) \prec q_n, \text{ т.е. } f(x) = x.$$

Из доказанного в 1), 2), 3) следует, что $l(AB) = f(AB)$ и длина отрезка единственна.

Мы определили понятие длины отрезка – простейшего геометрического образа. Дальнейшим обобщением этой теории является построение теории меры (меры Лебега) на классе более сложных точечных множеств на прямой.

3. Площадь многоугольника.

Определение. Многоугольником евклидовой плоскости будем называть замкнутую ограниченную область, граница которой состоит из конечного числа отрезков.

Область – это связное открытое множество.

Замкнутая область содержит свою границу.

Ограниченная область евклидовой плоскости – существует круг, содержащий эту область

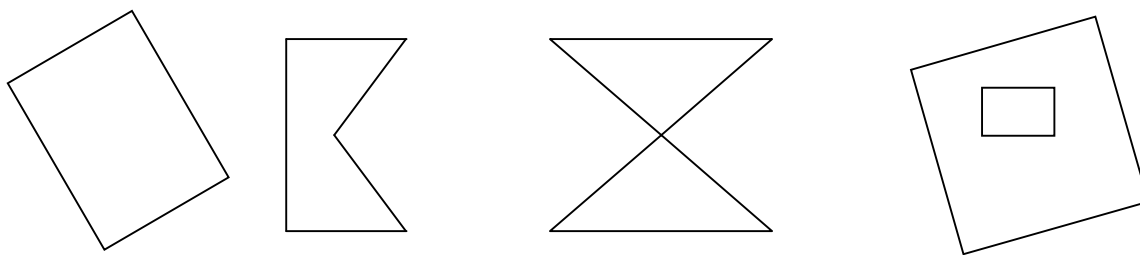


Рис.97

В школьном курсе плоский многоугольник определяется как часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией. Среди многоугольников, представленных на рис.97, последний не подходит под школьное определение многоугольника.

Среди многоугольников выделяются *простые* многоугольники.

Определение. Многоугольник называется *простым*, если он гомеоморфен замкнутому кругу.

В школьном курсе многоугольник называется простым, если границей является простая замкнутая ломаная линия (без самопересечения).

Не простой многоугольник называется *звездчатым*. На рис.97 первый и второй многоугольники – простые, третий – звездчатый.

Определение. Простой многоугольник называется *выпуклым*, если он весь лежит в одной полуплоскости, границей которой является прямая, содержащая любую его сторону.

На рис.91 первый многоугольник – выпуклый, остальные – невыпуклые.

В школьном курсе геометрии изучаются, в основном, выпуклые многоугольники

Перейдем к введению понятия *площади многоугольника*.

Пусть M – множество всех многоугольников евклидовой плоскости или евклидова пространства

$$M = \{F, F', F'', \dots\}$$

Аксиоматическое определение площади многоугольника.

Говорят, что на множестве M введено измерение площадей, если задано отображение S , которое каждому многоугольнику ставит в соответствие положительное действительное число $S(F)$, которое называется площадью многоугольника и при этом выполняются следующие три свойства(аксиомы).

- 1) Равные многоугольники, имеют равные площади, т.е. $F=F' \Rightarrow S(F)=S(F')$. Равенство многоугольников определяется через движение. Первая аксиома – это аксиома инвариантности площади относительно движения.

2) Аксиома аддитивности. Если многоугольник F состоит из двух многоугольников F' и F'' без общих внутренних точек: $F=F'+F''$, то $S(F) = S(F') + S(F'')$.

3) Аксиома нормированности. Площадь квадрата Q , стороной которого является единичный отрезок, равна 1: $S(Q)=1$.

Основной теоремой в теории площадей многоугольников является *теорема существования и единственности*:

Функция $S(F)$ на множестве M , которая каждому многоугольнику ставит в соответствие положительное число и при этом выполняются аксиомы 1)-3), существует и единственна.

Прежде чем доказать выше сформулированную теорему, доказывается *теорема о площади прямоугольника*.

Затем выводятся формулы площадей простейших многоугольников: параллелограмма, треугольника, трапеции.

Пользуясь формулой площади треугольника, и разбивая любой многоугольник на треугольники, можно вычислить площадь любого многоугольника.

4. Перейдем к доказательству *теоремы о площади прямоугольника*.

Теорема: Если функция $S(F)$, удовлетворяющая аксиомам 1)-3) на множестве M существует, то для прямоугольника P с измерениями x и y она равна $S(P)=xy$

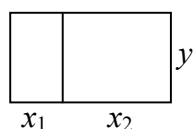
Доказательство:

Итак, пусть дан прямоугольник P с длинами сторон x и y , тогда его площадь будет функцией его сторон $S(P)=S(x,y)$ причем эта функция удовлетворяет следующим условиям:

$$1) S(x, y) > 0$$

$$2) S(x, y) = S(y, x) \text{ - это следует из аксиомы инвариантности площади.}$$

$$3) S(x_1 + x_2, y) = S(x_1, y) + S(x_2, y) \text{ - по аксиоме аддитивности.}$$



$$4) S(1,1) = 1 \text{ - по аксиоме нормированности}$$

Будем рассматривать прямоугольники, у которых x меняется, а $y=y_0$, тогда

$$S(x, y_0) = f(x) ,$$

причем

$$1) f(x) > 0$$

$$2) f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

3) $f(x)$ - монотонно возрастающая функция

Из курса математического анализа известно, что функция одной переменной, удовлетворяющие условиям 1)-3), является линейной, т.е. $f(x) = kx$, но через $f(x)$ мы обозначили $S(x, y_0)$, значит,

$$S(x, y_0) = kx \quad (16.6)$$

Пусть теперь y меняется, тогда

$$S(x, y) = k(y) \cdot x \quad (16.7)$$

Положим в формуле (16.7) $x=1$, получим

$$S(1, y) = k(y) \quad (16.8)$$

Подставим выражение $k(y)$ в формулу (16.7)

$$S(x, y) = S(1, y) \cdot x \quad (16.9)$$

Пусть $x=1$, тогда из формулы (16.9) получим

$$S(1, y) = S(y, 1) = S(1, 1) \cdot y \quad (16.10)$$

Выражение $S(1, y)$ подставим в формулу (16.9)

$$S(x, y) = S(1, 1) \cdot x \cdot y, \text{ но } S(1, 1) = 1, \text{ тогда } S(x, y) = x \cdot y, \text{ т.е. } \underline{S(P) = x \cdot y}$$

Теорема доказана.

Следует заметить, что теорема о площади прямоугольника доказывается в разных аксиоматиках по-разному. Л.С.Атанасян вместо аксиомы 3) берет усиленную аксиому 3*.

	S	y
	x	y
x	x	S

3*) площадь квадрата Q со стороной a равна a^2 : $S(Q) = a^2$.

В этом случае, дополняя прямоугольник со сторонами x и y до квадрата со стороной $x + y$, получим площадь квадрата S_I будет равна $S_I = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$.

С другой стороны по аксиоме аддитивности площади

$$S_I = x^2 + y^2 + 2S,$$

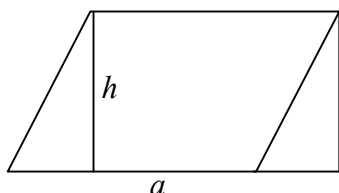
где S -площадь данного прямоугольника.

Приравниваем правые части полученных формул, получаем

$$S = xy$$

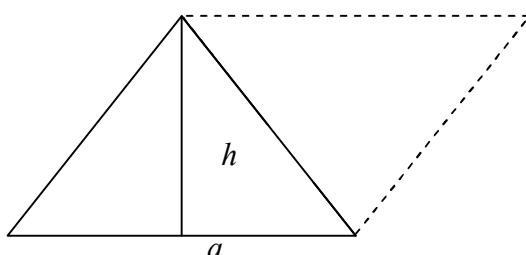
Используя формулу площади прямоугольника, нетрудно вывести формулы площадей:

1) параллелограмма



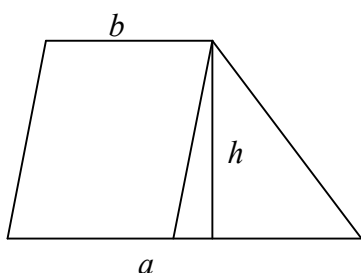
$$S = ah$$

2) треугольника



$$S = \frac{1}{2}ah$$

3) трапеции



$$S_{\text{трап}} = S_{\text{паралл}} + S_{\text{тр.}}$$

$$S_{\text{трап}} = ah - \frac{1}{2}(a - b)h = \frac{1}{2}(a + b)h.$$

Вопросы и упражнения

1. Перечислите аксиомы длин отрезков.
2. На какие аксиомы и понятия опирается доказательство существования длины отрезка?
3. На какие аксиомы и понятия опирается доказательство единственности длины отрезка?
4. Как доказывается существование длины отрезка в аксиоматиках Гильберта, Вейля, Погорелова?
5. Перечислите аксиомы площади.
6. По какой схеме строится теория площадей многоугольников?
7. Как доказывается теорема о площади прямоугольника в аксиоматике А.В.Погорелова?

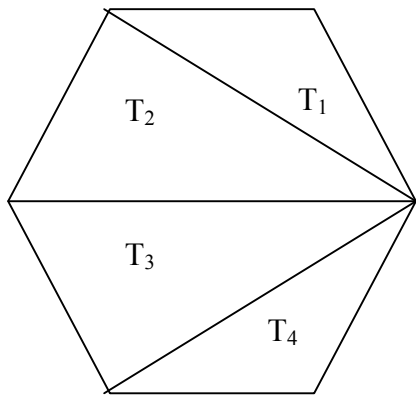
**§17. Теорема существования и единственности площади
многоугольника. Равновеликость и равноставленность.
Теория объемов (обзор)**

**1. Теорема существования и единственности площади
многоугольника.**

Теорема. Функция $S(F)$, определенная на множестве M и удовлетворяющая аксиомам 1)-3) существует и единственна.

1. Докажем существование площади многоугольника.

Пусть дан многоугольник $F \in M$. Будем рассматривать простые



многоугольники, а всякий простой многоугольник можно разбить на конечное число треугольников $T_1, T_2, \dots, T_k$ так, что выполняются следующие условия:

$$1) T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k = F$$

2) Пересечение любых двух треугольников либо пустое множество, либо их общая сторона, либо их общая вершина.

Такое разбиение многоугольника F на треугольники называется *триангуляцией*.

Тогда по аксиоме аддитивности площади

$$S(F) = S(T_1) + S(T_2) + \dots + S(T_k) = \sum_{i=1}^k S(T_i),$$

$$S(T_i) = \frac{1}{2} a_i h_i \text{ и } S(F) = \sum_{i=1}^k a_i h_i \quad (17.1)$$

Далее доказывается, что функция $S(F)$, определенная по формуле (17.1), удовлетворяет аксиомам 1)-3) площади.

Таким образом, доказано, что площадь многоугольника существует.

Можно доказать также, что площадь многоугольника не зависит от способа триангуляции.

2. Единственность площади многоугольника доказывается методом от противного.

Предположим, что наряду с функцией $S(F)$, определенной формулой (17.1), существует еще одна функция $S_I(F)$, удовлетворяющая аксиомам 1)-3).

Чтобы получить выражение для функции $S_I(F)$ мы проведем те же рассуждения, что и для функции $S(F)$.

Так как функция $S(F)$ и $S_I(F)$ каждому треугольнику T_i относят одно и тоже число $S(T_i) = S_I(T_i) = \frac{1}{2} a_i h_i$, то $S_I(F) = S(F) = \sum_{i=1}^k a_i h_i$.

Единственность площади доказана.

2. Равновеликость и равноставленность многоугольников.

Определение 1. Два многоугольника называются равновеликими, если они имеют одинаковую площадь.

Определение 2. Два многоугольника называются равноставленными, если их можно разложить на одинаковое число соответственно равных многоугольников.

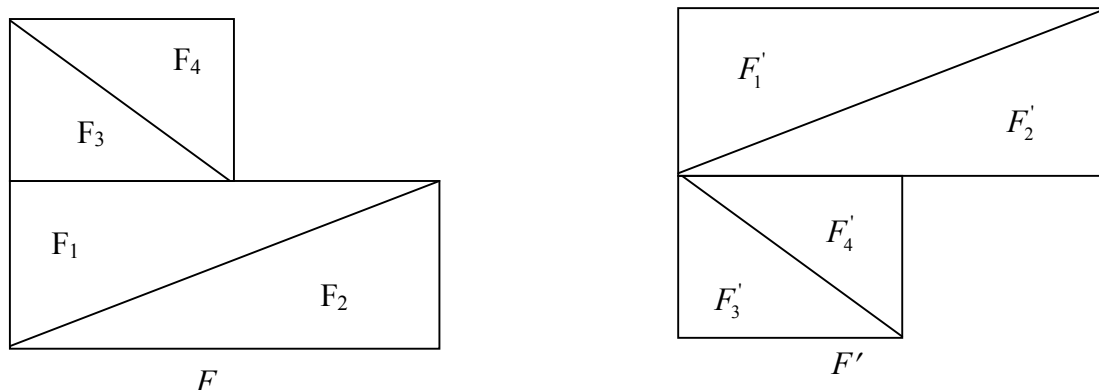


Рис.98

Например, многоугольники F и F' на рисунке 98 равноставлены.

Теорема 2. Если два многоугольника являются равноставленными, то они равновелики.

Доказательство:

Пусть F и F' равноставленные (рис.98), надо доказать, что они являются равновеликими, т. е. имеют одинаковую площадь:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_k$$

$$F' = F'_1 + F'_2 + \dots + F'_k, \text{ причем } F_i = F'_i, i = \overline{1, k}$$

Тогда по аксиоме аддитивности:

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2) + \dots + S(F_k)$$

$S(F') = S(F_1') + S(F_2') + \dots + S(F_k')$, но $S(F_i) = S(F_i')$ по аксиоме инвариантности площади. Следовательно, $S(F) = S(F')$.

Теорема 3. (Больяи-Гервина).

Если два многоугольника являются равновеликими, то они будут равноставленными.

Доказательство этой теоремы мы не приводим. Из теорем 2 и 3 следует, что отношения равновеликости и равноставленности на множестве M всех многоугольников совпадают.

Мы определили понятие площади для многоугольников. Это понятие можно расширить на более широкий класс плоских фигур, ввести понятие квадратуемой фигуры и определить площади на классе квадратуемых фигур (см [7]).

3. Теория объемов (обзор).

Рассмотрим теперь в обзорном порядке теорию объемов тел. Понятие объема многогранника в евклидовой геометрии вводится таким же путем, как и понятие площади многоугольника.

Пусть M – множество всех многогранников пространства. Говорят, что в евклидовом пространстве установлено измерение объемов многогранников, если задано отображение: $V : M \rightarrow R^+$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1) $T \cong T' \Rightarrow V(T) = V(T')$ (инвариантность при движении);
- 2) $T = T' + T'' \Rightarrow V(T) = V(T') + V(T'')$ (аддитивность функции V);
- 3) $V(T_0) = 1$, где T_0 – куб, ребро которого принято за единичный отрезок.

Положительное число $V(T)$ называется *мерой* или *объемом* многогранника T . Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Если функция $V(F)$ существует, то для прямоугольного параллелепипеда P с измерениями x, y, z , она имеет вид $V(P) = x \cdot y \cdot z$.

Теорема 2. Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Теорема 3. Объем тетраэдра равен одной трети произведения площади

его основания на высоту.

Эти свойства позволяют доказать *теорему существования и единственности объема многогранника*:

На множестве всех многогранников существует и притом единственная функция $V(F)$, удовлетворяющая аксиомам объемов 1)-3).

Далее вводятся понятия равновеликих и равносоставленных многогранников

Определение 1. Два многогранника называются равновеликими, если их объемы равны.

Определение 2. Два многогранника называются равносоставленными, если их можно разложить на одно и то же число соответственно конгруэнтных многогранников.

Если два многогранника являются равносоставленными, то, очевидно, они будут равновеликими. Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. не всякие два многогранника, которые имеют равные объемы, могут быть разложены на попарно равные многогранники.

В 1901 г. немецкий математик Ден доказал, что куб и равновеликий ему правильный тетраэдр не равносоставлены. Можно показать, что равновеликие тетраэдры, вообще говоря, не равносоставлены. Это объясняет, почему при выводе формулы объема пирамиды приходится прибегать к теории пределов.

Вопросы и упражнения

1. Приведите формулировку теоремы о существовании и единственности площади.
2. На какие аксиомы и теоремы опирается доказательство единственности площади многоугольника?
3. Перечислите последовательность предложений, применяемых при доказательстве существования площади многоугольника.
4. На какие аксиомы опирается доказательство того, что два равносоставленных многогранника являются равновеликими.

Литература

1. Агафонова, Т.Л. Задачи по объединенному курсу геометрии/ Т.Л. Агафонова, И.С. Герасимова, В.М. Майоров и др/ Учебное пособие. – Ярославль: ЯГПИ, 1991.
2. Александров, А.Д. Основания геометрии/ А.Д. Александров.– М.: «Наука», 1987.
3. Базылев, В. Т. Геометрия/ В.Т. Базылев, К.И. Дуничев и др./ Учеб пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1974. – Ч.2
4. Базылев, В. Т. Сборник задач по геометрии/ В.Т. Базылев, К.И. Дуничев и др./ Учеб пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1980.
5. Горшкова, Л.С. Неевклидова геометрия: Факультативный курс для старшеклассников/ Л.С. Горшкова, Н.В Титова/ Учебное пособие. – Пенза: ПГПУ, 2005.
6. Егоров, И.П. Основания геометрии/ И.П. Егоров/ Учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: «Просвещение», 1984.
7. Егоров, И.П. Лекции по аксиоматике Вейля/ И.П. Егоров.– Приволжск. изд., 1972.
8. Ефимов, Н.В. Высшая геометрия/Н.В. Ефимов.– М.: «Наука», 1978.
9. Паньженский, В.И. Введение в дифференциальную геометрию/ В.И. Паньженский.– Пенза: ПГПУ, 2008.
10. Розенфельд, Б.А. Неевклидовы пространства/ Б.А. Розенфельд.– М.: «Наука», 1969.
11. Франгулов, С. А. Сборник задач по геометрии/ С. А. Франгулов, П. И. Совертков и др./ Учеб. пособие для студентов пед. вузов.– М.: «Просвещение», 2002.

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. Г. БЕЛИНСКОГО

Любовь Степановна Горшкова,
кандидат физико-математических наук,
доцент

Марина Валерьевна Сорокина,
кандидат физико-математических наук,
доцент

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Пособие издается в авторской редакции
Технический редактор – Л. И. Дорошина
План университета 2009 г. (Поз. 176)

Подписано к печати
Бумага писчая белая
Усл.-печ.л. 8,4
Тираж 100 экз.

Формат 60 × 84 1/16
Печать офсетная
Уч.-изд.л. 9
Заказ № 171/09
Цена С. 171

Редакционно-издательский отдел ПГПУ им. В. Г. Белинского:
440026, Пенза, ул. Лермонтова, 37, Пед. ун-т. Корп. 5. Комн. 466. РИО.